La naissance de la cohomologie des groupes

Nicolas Basbois

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS – UFR Sciences
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Spécialité : Mathématiques

présentée et soutenue par

Nicolas BASBOIS

La naissance de la cohomologie des groupes

Thèse dirigée par **Frédéric PATRAS**

soutenue le 26 octobre 2009

Membres du jury :

M.	C. BARTOCCI	Associate Professor, Gênes	Examinateur
M.	J.-L. CATHELINEAU	Professeur émérite, Nice	Examinateur
M.	J. KOUNEIHER	Maître de Conférences IUFM, Nice	Examinateur
M.	C. McLARTY	Full Professor, Cleveland	Rapporteur
M.	F. PATRAS	Directeur de recherche CNRS, Nice	Directeur de thèse
M.	J.-J. SZCZECINIARZ	Professeur, Paris 7	Rapporteur & Président

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2

Remerciements

Le seul moyen, quand il s'agit d'écrire ces lignes, de se lancer sans trop tergiverser, est de considérer le chapitre des remerciements comme un exercice de style comme un autre. J'espère ainsi qu'une fois les premiers mots tapés, les autres viendront d'eux-mêmes, en respectant néanmoins ma pensée.

J'ai peur d'oublier quelqu'un, de mal retranscrire ce que j'ai pu ressentir au cours de ces quatre années si longues et brèves à la fois. C'est que ces lignes sont d'importance : ce seront à peu près les seules à être lues au cours de ma soutenance... Mais tant pis ! Je compte sur la mansuétude de mes lecteurs et de mes amis.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Frédéric Patras pour ses conseils, ses idées, sa patience et sa gentillesse. En outre, je suis fier d'avoir travaillé avec un homme de science tel que lui.

Je remercie vivement mes rapporteurs, Jean-Jacques Szczeciniarz et Colin McLarty. Je les apprécie particulièrement, le premier notamment pour un cours de DEA mémorable sur la révolution copernicienne, le second pour ses travaux sur Mac Lane et Noether que j'ai découverts au cours de ma thèse. Je suis heureux de les compter parmi les membres de mon jury.

Merci également aux examinateurs Claudio Bartocci, Joseph Kouneiher et Jean-Louis Cathelineau, avec une pensée particulière pour ce dernier, que je connais maintenant depuis sept ans !

Je remercie tous ceux de l'ancienne équipe "algèbre et topologie" qui ont pu m'aider d'une façon ou d'une autre au cours de ma thèse, comme Clemens, François-Xavier, Georges ou Marc. Merci également à Jean-Michel Lemaire pour ses conseils avisés lors de mes essais d'écriture de début de thèse et à Persi Diaconis pour sa gentillesse et l'intérêt qu'il a trouvé à ma thèse.

Je n'oublie pas le personnel non assimilé "chercheur" du laboratoire Dieudonné. J'ai trouvé tout le monde serviable et aimable, ce qui m'a aidé à me sentir bien dans ce laboratoire. J'ai une profonde gratitude pour Isabelle et Jean-Louis, à qui j'ai demandé beaucoup, parfois l'impossible, et qui ont toujours fait leur maximum. J'ose espérer qu'avec mon départ Jean-Louis sera plus tranquille !...

Je n'ai pas fait que chercher au cours de ma thèse. J'ai également enseigné et ai hautement apprécié cette expérience, dans laquelle je me suis totalement investi, parfois trop ! Même s'ils ne le sauront probablement jamais, il y a nombre d'étudiants pour qui je garde de l'affection et grâce à qui j'ai trouvé matière à réjouissance lors de mes enseignements. Je peux néanmoins citer les agrégatifs Maud, Guillaume, Olivia, Sarah et Bruno – nos parties de tennis vont me manquer ! Je conserverai également un très bon souvenir de toutes celles et ceux avec qui j'ai collaboré pour les cours et les TD.

Le laboratoire héberge un microcosme, celui des thésards, agité d'un renouvellement rapide et perpétuel. J'y suis promptement passé du statut de petit nouveau à celui d'ancien, et voilà maintenant que je n'en fais plus partie. Au cours de ma vie dans ce mini univers, j'ai eu l'occasion de lier de nombreuses connaissances et amitiés ; j'y ai trouvé de l'aide, du réconfort et de la joie.

Ils sont tellement nombreux à m'avoir aidé ou avoir partagé des soirées et des rires avec moi ! Pêle-même je pense à Fabien et son humour insurpassable, Marie que je suis allé voir à la maternité lors de son deuxième accouchement, Stéphane et son rire tonitruant. Je pense à mes compagnons de CIES et de coupe du monde 2006, Xavier et Marc. J'en profite pour adresser mes remerciements les plus sincères à Marc pour l'aide constante qu'il m'a apportée dans ma lutte – euphémisme – pour comprendre les textes en allemand. Je pense à Delphine grâce à qui je me disais que mon bureau était au fond plutôt bien rangé. Je pense à Ju et la remercie pour ses repas hongrois, avec pommes de terre. Je pense à Marcello, Olivier et leurs maths incompréhensibles. Je pense à Hugues et attends beaucoup de sa mise au point d'un nouvel ordre financier. Je pense au Mig et son fameux JM. Je pense à Thu, Laura et à Chiara, à Rémy, Hugo et Florent arrivés sur la fin de ma thèse.

Parmi tous ceux qui ont rendu cette vie dans le laboratoire si agréable malgré le stress constant de la thèse, il en est qui ont une place toute particulière. Il y a bien entendu Michel et Pierre, amis de longue date, avec qui j'ai têté mes premiers biberons de substance mathématique. Et j'ai une affection toute particulière pour mes cobureaux, Thomas, Joan et Patrick. Je ne retrouverai jamais de tels collègues de travail je pense. Nous avons tant partagé ensemble, refait le monde je ne sais combien de fois dans le bureau 604 ! Vous me manquez déjà. A vous entre tous : merci !

Je finirai par adresser mes pensées et mes remerciements à ma famille, en particulier à mes parents qui, s'ils sont loin de moi, n'en sont pas moins toujours à mes côtés.

Table des matières

Introduction

L'intitulé de cette thèse indique que je ne pose pas ici la question de ce qu'est la cohomologie des groupes au sens de ce qu'elle est à l'heure actuelle (même s'il m'arrivera d'y faire référence afin de montrer une évolution intéressante ou pour parler en des termes plus familiers au lecteur), donc que je n'entends pas m'attarder sur la manière dont elle est envisagée par ceux qui la pratiquent. Je cherche ici à comprendre comment elle est née, quels développements mathématiques y ont conduit et quels étaient ses tâches initiales.

La cohomologie des groupes n'est pas ce qu'on pourrait appeler une science première ; elle ne vise pas à résoudre des problèmes qui se posent à l'homme de façon immédiate, comme ce fut le cas à l'origine de la géométrie, ni même à répondre à des questions élémentaires (aux réponses parfois bien loin de l'être) sur les nombres, comme cela est le cas de l'arithmétique. Elle prend sa source dans des problèmes divers et des constructions abstraites élaborées et, lorsqu'on la considère maintenant, on peut être bien en mal de distinguer quelles sont ses diverses influences et quelle raison principale (si tant est qu'il est possible d'en isoler une) a conduit à son élaboration.

La cohomologie des groupes désigne une théorie étudiant les groupes à l'aide d'invariants algébriques qui sont eux-mêmes des groupes. Si l'on se penche sur les divers traités consacrés à ce sujet, il apparaît que la cohomologie des groupes a des applications essentiellement algébriques et arithmétiques – il est par exemple naturel de suivre un cours de cohomologie des groupes avant d'aborder la théorie du corps de classes – et que l'on s'accorde à lier son développement à celui de la théorie des extensions de groupes, des algèbres associatives et des représentations. Pour autant, la cohomologie des groupes n'est pas reconnue comme une théorie purement algébrique, et relève plutôt de la topologie algébrique. On peut donner une justification simple de cela par le fait que la cohomologie d'un groupe G (à coefficients dans un G-module M) est exactement la cohomologie d'un espace topologique BG (à coefficients dans M), dit espace classifiant. La cohomologie des groupes peut ainsi être présentée comme une théorie faisant le pont entre plusieurs domaines des mathématiques, au sens où l'on peut utiliser des techniques topologiques pour obtenir des propriétés sur les groupes, qui pourront être utiles en algèbre et en arithmétique.

Concrètement, la cohomologie des groupes est fondée sur le procédé suivant, associant à un groupe donné G et un G-module M une suite de groupes $(H^n(G, M))_{n\geq 0}$. Pour $n \geq 0$, soit $C^n(G, M)$ l'ensemble des fonctions de G^n dans M. On définit en chaque degré n une application $d^n : C^n(G, M) \to C^{n+1}(G, M)$ par :

$$d^n f(g_1, ..., g_{n+1}) = g_1 f(g_2, ..., g_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(g_1, ..., g_k g_{k+1}, ..., g_{n+1})$$

$$+(-1)^{n+1} f(g_1, ..., g_n).$$

Si l'on définit $Z^n(G, M) = \mathrm{Ker}(d^n)$, $B^n(G, M) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$ pour $n \geq 1$, et $B^0(G, M) = 0$, comme $d^{n+1} \circ d^n = 0$ pour tout n, on peut définir le quotient $Z^n(G, M)/B^n(G, M)$. C'est ce quotient que l'on appelle groupe de cohomologie en dimension n de G à coefficients dans M, et que l'on note $H^n(G, M)$.

Pourquoi choisir la cohomologie des groupes comme thème d'étude ? Parce qu'elle se situe au carrefour entre plusieurs disciplines et fait la synthèse de plusieurs de leurs aspects ; parce qu'elle prend naissance à une époque très riche historiquement, voyant les idées de l'algèbre moderne prolonger leur influence au-delà de ses fondateurs tels que Noether et van der Waerden, assistant à la naissance de la théorie des catégories, de tout un nouveau langage de l'algèbre faisant apparaître des flèches, des suites exactes, des foncteurs, etc., ainsi qu'à l'essor du structuralisme en mathématique sous l'impulsion notamment de Bourbaki.

L'histoire des mathématiques commence à compter en son sein plusieurs travaux étudiant la naissance et l'essor de l'algèbre moderne, de la théorie des catégories et du structuralisme[1]. L'importance de ces courants dans le développement de l'algèbre, et plus généralement des mathématiques du vingtième siècle, est incontestable, et l'on commence à posséder le recul nécessaire pour les étudier des points de vue historique et épistémologique. La naissance de la cohomologie des groupes est indissociable notamment de la propagation de l'algèbre moderne, et nous nous sommes appliqués à le mettre en évidence en analysant, entre autres, le rôle d'Emmy Noether et de Heinz Hopf dans cette naissance, ainsi qu'en soulignant l'influence de l'algèbre moderne sur une des figures de proue de l'édification de la cohomologie des groupes, à savoir Saunders Mac Lane. On pourrait souhaiter une étude plus approfondie et

[1] Cf. notamment [43], [138], [177], etc. ainsi que plusieurs contributions de Colin McLarty, telles que [160], [161] et [163].

systématique de la corrélation entre le développement de l'algèbre moderne et l'émergence de la cohomologie de systèmes algébriques, mais nous espérons néanmoins déjà, avec ce mémoire, apporter un éclairage supplémentaire sur la façon dont certaines théories ont émergé dans la première moitié du vingtième siècle.

Lorsqu'on ne prend pas la peine de questionner les conditions historiques de la naissance de la cohomologie des groupes, il est facile de tomber dans certains écueils, sortes de raccourcis, qui font apparaître telle ou telle origine d'une théorie comme privilégiée, car considérée avec un oeil moderne. Or celui-ci a en général travaillé, retravaillé et finalement ingéré les concepts d'une manière qui peut s'avérer commode pour l'esprit, commode pour des manipulations dans le cadre de la recherche ou de l'enseignement, mais qui ont coupé le lien avec le développement historique. A titre d'exemple grossier, on peut entendre au sein d'un laboratoire, d'un cours de Master 2, que le théorème 90 de Hilbert énonce la trivialité du premier groupe de cohomologie $H^1(G, L^\times)$ associé à une extension cyclique de corps de nombres L/K, de groupe de Galois G. De là il peut être tentant – mais évidemment dangereusement réducteur – de considérer que la cohomologie galoisienne, et peut-être plus généralement la cohomologie des groupes, trouvent leur origine dans la théorie algébrique des nombres, voire même dans le *Zahlbericht*[2] de Hilbert. Mon travail saura en premier lieu montrer que la cohomologie des groupes a des racines bien plus complexes et variées, et notamment que ses origines principales sont certainement plus à chercher du côté de la topologie (algébrique) que de la théorie algébrique des nombres.

Il apparaîtra clairement au lecteur que les écrits mathématiques d'époque, en particulier les articles, constituent l'essentiel des matériaux que j'ai exploités, et qu'une des principales tâches que je me suis assignées est de donner au travers de ces lignes véritablement accès aux articles que j'ai sélectionnés. Ce faisant, je me suis efforcé de rendre les raisonnements étudiés les plus clairs possibles tout en leur restant très fidèle. Cela signifie que j'ai tenté non seulement de commenter, mais aussi d'expliquer les raisonnements intervenant dans les articles qui m'ont intéressé : j'ai considéré que la compréhension mathématique des notions et résultats les plus pertinents dans le cadre de mon mémoire était d'une grande importance. En effet, on ne peut s'approcher d'une parfaite compréhension d'un raisonnement ou du gain d'une nouvelle approche qu'en appréhendant tous les mécanismes (d'importance moindre certes) qui en accompagnent la formulation. Et l'on minimise ainsi le risque de faire intervenir des concepts et des points de vue étrangers à ceux qui

[2] A noter l'existence d'une traduction en anglais, cf. [110].

soutiennent réellement les textes étudiés.

Ce choix méthodologique est motivé principalement par deux raisons. Citons pour commencer ce propos d'Edmund Husserl dans *L'origine de la géométrie*[3] :

"Ainsi s'accomplit donc, grâce à la notation écrite, une conversion du mode-d'être originaire de la formation de sens, [par exemple] dans la sphère géométrique, de l'évidence de la formation géométrique venant à énonciation. Elle se sédimente, pour ainsi dire. Mais le lecteur peut la rendre de nouveau évidente, il peut réactiver l'évidence."

Les écrits mathématiques, articles et livres notamment, étant le moyen de transmission privilégié aux autres membres de la communauté, donc la composante principale du processus de sédimentation des savoirs mathématiques préalable à l'organisation et la simplification (à des visées pédagogiques par exemple) des connaissances, il est légitime de se concentrer sur eux et même de les considérer comme seuls pertinents lorsque l'on cherche à découvrir ce qui relève de l'universel dans le développement historique d'une discipline mathématique. Dans cette optique, c'est donc sur les écrits mathématiques qu'il faut se concentrer, car ce sont via eux que les mathématiques se sont transmises à la majorité des (enseignants)-chercheurs. Même si l'on peut perdre la subjectivité (ce qui, lorsque l'on vise l'universel au sein du particulier, s'avère en fin de compte préférable) et la psychologie du mathématicien dans son processus de formation de savoir, il reste néanmoins dans la façon de présenter ses connaissances, ses constructions, dans la liberté de chaque auteur toujours sensible malgré la forme assez codifiée et asceptisé d'un écrit mathématique, des indices forts et peut-être plus objectifs du processus d'élaboration que les témoignages souvent a posteriori des auteurs eux-mêmes ou qui présentent des versions édulcorées de leur propre histoire (et ce, même dans les correspondances entre mathématiciens). En outre, la cristallisation des contenus au sein du langage et de la logique purement mathématiques, via l'écriture d'un livre ou d'un article, donnent des matériaux indiscutables en vue de la progression logique du savoir mathématique.

La seconde raison est que je considère que l'histoire des mathématiques ne s'adresse pas qu'aux historiens. Les mathématiciens doivent trouver un intérêt réel à la lecture des travaux d'histoire des mathématiques. L'Histoire ne s'écrit pas pour un cercle d'initiés, elle s'écrit pour que la mémoire des événements ne se perde pas et pour que les conclusions que l'on en tire

[3] Cf. [131] pp. 410-411

servent aux générations futures. De même, un des objectifs principaux de l'histoire des mathématiques devrait être de rendre les mathématiciens au travail[4] – qui regardent le plus souvent le présent de leurs recherches mathématiques avec seulement une vague connaissance de leur passé immédiat – conscients du passé plus lointain de leurs disciplines. L'histoire des mathématiques peut avoir pour ambition de faire découvrir aux mathématiciens certains liens originels entre différents domaines qui ont pu se perdre avec le temps, de porter à leur connaissance des champs de recherche abandonnés à une certaine époque faute d'avancées et qui pourraient revivre à la lumière des découvertes récentes. Bref, en donnant un accès au passé des disciplines, on peut améliorer la conscience des mathématiciens de leur héritage, leur compréhension des mathématiques, et peut-être en stimuler la créativité et en repenser l'enseignement.

Il est évident qu'en épurant ou simplifant à l'extrême les contenus mathématiques présentés dans le cadre d'un mémoire d'histoire des mathématiques, on ne peut que vider le propos de ce qui a le plus de chance d'intéresser le mathématicien, de trouver un écho au sein de son activité quotidienne. Voulant obtenir l'effet inverse, il m'a donc paru nécessaire d'articuler le plus possible ma thèse selon le fil des raisonnements mathématiques.

L'approche que je suis ici veut contribuer à une analyse d'un point de vue spécifique, qui est celui de l'ajustement de la dynamique propre aux concepts et problèmes mathématiques (mon principal objet d'étude) aux différents facteurs qui viennent en influencer le cours (programmes de recherche, échanges, écoles de pensée...). Cette approche naturelle[5] conduit spontanément à la possibilité d'arbitrages des débats par les contenus mathématiques mêmes. Elle a l'avantage, lorsque des stratégies mathématiques antagonistes sont en concurrence, d'éviter les biais historiographiques induits par telle ou telle grille de lecture. Elle a plusieurs origines. Tout d'abord, une inspiration de nature "archéologique" ou "phénoménologique", dans une acception héritée de Foucault et, au-delà, de Husserl – acception qui, dans le contexte mathématique, prend une dimension spécifique. Dans la perspective phénoménologique[6], la logique du développement mathématique est d'abord celle des concepts – l'objet et les problèmes mathématiques sont au centre de l'ana-

[4]Pour reprendre la formule "working mathematician" employée par Mac Lane en titre de son traité [149] sur les catégories.

[5]Et en fin de compte assez proche de travaux comme ceux de Epple ([76]), Weibel ([237]) ou McLarty ([163]) par son empathie aux contenus mathématiques.

[6]On sait qu'elle a fortement marqué l'école épistémologique française, qui s'est largement construite en se situant – de façon critique, mais constructive – par rapport à la phénoménologie. Les ouvrages de Cavaillès, Desanti ou Vuillemin en témoignent amplement. Les travaux récents sur Gödel et un renouveau des études husserliennes ont contribué à la

lyse phénoménologique. En ce sens, elle est en grande partie en accord avec d'autres approches, comme celle du rationalisme critique et des réflexions sur les reconstructions rationnelles d'un Lakatos, où l'histoire interne, pour ne pas être le seul critère herméneutique, reste privilégiée.

Je vise donc ici en partie à reproduire le genre d'essais qu'a constitué le *Preuves et Réfutations* [140] d'Imre Lakatos (mais épuré de la forme du discours choisie par Lakatos), c'est-à-dire chercher l'universel au sein des productions particulières des mathématiciens, sans toutefois négliger l'analyse historique proprement dite.

Pour ce faire, Husserl fournit la méthode[7] : il s'agit, profitant de ce que nous avons en commun avec les mathématiciens dont nous analysons le travail la rationalité humaine, d'appliquer notre rationalité propre dans les différentes tentatives d'explication des évolutions conceptuelles qui s'offrent à nous. Tout mathématicien est un homme ou une femme vivant dans un monde qui n'est pas fait uniquement de concepts ou de rationalité, et est donc soumis à différentes contraintes, qui peuvent être d'ordre social, psychologique, physique, économique, etc. Ces différentes contraintes peuvent occasionner ce qu'on pourrait appeler des "accidents" dans l'évolution rationnelle des théories mathématiques. Ces accidents consistent par exemple en des incompréhensions entre mathématiciens, des volontés de taire ou au contraire d'accroître l'importance accordée à certaines productions, le fait de passer à côté de liens évidents entre certains problèmes ou de réponses simples à certaines questions, le fait d'utiliser continuellement certaines méthodes au détriment d'autres, etc.

Dans ma volonté de tracer une évolution qui touche à ce qu'il y a d'universel dans les réalisations de chaque mathématicien, qui soit rationnelle (tout

---

remettre d'actualité, même si ses manifestations dans le contexte de la méthodologie de l'histoire des mathématiques restent assez discrètes. On mentionnera toutefois les travaux de McLarty sur Mac Lane et l'héritage de Göttingen, ainsi que l'édition et la traduction française des écrits de Gian-Carlo Rota. Pour le renouveau des études phénoménologiques dans un contexte scientifique et, plus spécifiquement, logique et mathématique, cf. [19].

[7]Cf. [131], p. 423 : "Selon quelle méthode obtenons-nous un *a priori* du monde historique qui soit universel et en cela fixe et à jamais originaire ? Chaque fois que nous prenons conscience de nous-mêmes, nous nous découvrons dans l'évidence d'un pouvoir, pouvoir de réfléchir à notre gré, d'inspecter l'horizon et de le pénétrer par une explicitation. Mais nous sommes et nous nous savons aussi en mesure de pouvoir faire varier en toute liberté, par la pensée, par l'imagination, notre existence humaine historique et ce qui s'y explicite comme son monde de vie. Et précisément dans l'acte libre de cette variation de parcours des imaginaires du monde de vie apparaît, dans le relief d'une évidence apodictique, une composante d'universalité essentielle qui persiste effectivement à travers toutes les variantes, comme nous pouvons nous en convaincre, dans une certitude apodictique. Nous nous sommes alors déliés de toute attache avec le monde historique dans son sens de facticité, monde considéré lui-même comme l'une des possibilités de la pensée."

en s'interdisant le plus possible une relecture a posteriori !), il est évidemment important de relever ce qui est du ressort de l'histoire externe – ces accidents mentionnés plus haut – et, lorsque les sources et le temps le permettent, de l'analyser. Nous profiterons donc du propos général pour mener des études de cas qui ont trait à des problématiques plus générales de l'histoire des sciences et de l'épistémologie, comme la confrontation de différentes traditions mathématiques, les difficultés de transmission des savoirs, la volonté de faire adhérer l'histoire avec une vision programmatique de l'évolution des mathématiques, etc.

J'en arrive au moment de préciser le corps de cette thèse.

Pour les mathématiques assez récentes (disons de moins d'un siècle), qui n'ont été que peu traitées par les historiens, la tâche est certainement immense de prétendre étudier la naissance ou le développement d'une discipline. Ne pouvant même en général concevoir un traitement exhaustif, il faut choisir des points particuliers à développer, que ce soit dans les faits étudiés eux-mêmes ou dans les méthodes appliquées. Ce genre d'approche nous est suggérée par des ouvrages comme *La Géométrie Algébrique* de Christian Houzel [127] ou *Pioneers of representation theory* de C.W. Curtis [44], qui affichent clairement leur but, à savoir l'étude historique d'une théorie mathématique bien identifiée. Ces livres sont divisés en chapitres qui abordent des points précis du développement historique des disciplines abordées ; ils peuvent traiter les contributions d'un mathématicien au développement de la discipline, suivre l'évolution d'un problème primordial qui en a stimulé l'essor, ou encore se concentrer sur certains articles phares.

Avec une telle approche se pose de manière continuelle un problème de choix. Si certaines évidences se dégagent de l'étude historique, si certaines contributions ne peuvent être occultées faute de perdre tout crédit, il est encore une fois inconcevable de tout traiter, et la subjectivité intervient nécessairement.

De fait l'ensemble du mémoire ne présente pas une homogénéité en terme de profondeur d'analyse ni même de type d'analyse employée. Suivant le thème abordé, l'explication mathématique plus ou moins poussée en fonction de son intérêt intrinsèque a été complétée par une analyse relevant de l'histoire externe. Cette thèse se présente donc comme une reconstruction de l'émergence de la cohomologie des groupes, qui cherche à mettre au jour ce qu'on peut y trouver d'apodictique et qui se présente sous la forme de tableaux décrivant une thématique, un mathématicien ou un article en particulier, et dans lesquels nous tenterons également de répondre, avec plus ou moins de profondeur suivant leur importance, aux problèmes soulevés par l'histoire externe et qui touchent à l'histoire des sciences, voire à l'épistémologie, et non plus seulement à l'histoire des mathématiques.

Le problème abordé par cette thèse étant de déterminer ce qui a mené à la naissance de la cohomologie des groupes, la fin est relativement simple à identifier, mais on peut par contre se demander à juste titre d'où partir, jusqu'où faire remonter l'histoire ayant mené à cette naissance. Ainsi se pose la question du choix des origines. On commencera par observer que, aucun mathématicien n'ayant besoin de réactiver des connaissances primitives en déroulant une longue chaîne de concepts et de théorèmes pour être en condition de travailler sur la cohomologie des groupes, l'historien ne peut raisonnablement pas considérer des origines séculaires de la cohomologie des groupes.

Le problème du choix se présente en fait à chaque fois que l'on veut remonter les différentes sources, les différents auteurs ayant influencé tel ou tel maillon intervenant dans la création de la théorie ; il est par conséquent loin d'être délibéré, car orienté par les traditions auxquelles se rapportent les articles reconnus comme fondateurs de la cohomologie des groupes. En outre, dans ce mémoire, je me suis imposé de choisir des points de départ d'un niveau assez élémentaire, qui ne demandent pas au lecteur d'avoir déjà fait de la recherche, de s'être spécialisé dans une branche des mathématiques pour comprendre les concepts mis en jeu. Ainsi ai-je décidé de partir d'études en lien avec la théorie des caractères de groupes, des représentations de groupes, des algèbres associatives et des extensions de groupes.

Ces différents points de départ se situant plusieurs dizaines d'années (entre 40 et 70 ans environ) avant la période (les années 1940) que l'on a identifié comme celle de la naissance de la cohomologie des groupes, il ne nous a pas semblé non plus pertinent de chercher à approfondir plus avant la connaissance historique qui les entoure – d'autres études s'en sont déjà occupées dans une large mesure. Ils sont des points de départ, en général connus comme des réalisations importantes des mathématiques – de ce fait, ils parlent à la plupart des historiens des mathématiques et des mathématiciens – qui permettent de donner des origines claires aux développements qui viendront par la suite. De grandes idées originelles sont ainsi fixées, l'analyse détaillée se concentrant sur ce qui en découle.

Je précise que, le propos faisant la part belle aux considérations purement mathématiques, n'apparaît peut-être pas toujours clairement ce qui relève du texte étudié lui-même et ce qui relève de mes propres explications. Néanmoins j'ai le plus souvent, à moins d'une complication véritablement excessive ou de l'analyse simultanée de plusieurs articles, respecté les notations originales, ce qui permet au lecteur voulant consulter par lui-même la teneur d'une source de s'y retrouver aisément. Les détails de raisonnement qu'il m'a paru nécessaire d'ajouter l'ont en général été en notes de bas de page, ou alors j'ai précisé que je reformule à ma manière les explications originales. Etant donnés la désuétude et le manque de précision de certains arguments originaux, j'en ai régulièrement donné (en plus) une vision moderne qui peut permettre au lecteur de s'y retrouver plus facilement et qui présente l'intérêt de pouvoir faire apprécier la différence entre la première formulation d'un concept et sa cristallisation dans des mathématiques qui l'ont travaillé, assimilé et reformulé. En bref, j'ai voulu, tout en respectant scrupuleusement l'esprit et la lettre des textes analysés, en faciliter le plus possible la compréhension par le lecteur car, même si j'espère que mon étude intéressera les spécialistes de la discipline, elle a aussi pour volonté d'être accessible la plupart du temps aux autres.

Je suis conscient que le travail présenté ici est loin d'épuiser le sujet et peut être amélioré de diverses façons – c'est en fait le cas de toute étude. Je n'ai par exemple pu explorer toutes les voies ayant mené d'une manière plus ou moins directe à la naissance de la cohomologie des groupes. Le manque le plus évident est celui de la théorie du corps de classes, qui n'est guère qu'évoquée ; le temps m'a fait défaut pour assimiler de manière satisfaisante cette théorie ardue. Heureusement cette lacune est à mon sens peu profonde car j'ai évoqué les points les plus importants de la théorie du corps de classes en vue de la naissance de la cohomologie des groupes et, pour ce qui est de la théorie du corps de classes dans son ensemble, elle n'est pas primordiale pour notre propos.

J'ai articulé ce mémoire selon deux grands axes. J'ai tout d'abord voulu donner un éventail de théories algébriques du début du vingtième siècle où la cohomologie a trouvé naturellement un terrain d'expression. J'ai retenu comme les plus significatives les théories des représentations, des algèbres associatives (qui se sont fondues l'une en l'autre avec les travaux de Brauer et Noether) et des extensions de groupes. J'ai présenté ce qu'il me semblait nécessaire de savoir sur le plan mathématique et historique au sujet de ces théories pour appréhender aisément les raisons de l'introduction des concepts les plus étroitement liés à la cohomologie des groupes. Pour ce qui est des théories des représentations et des algèbres, plusieurs études historiques en ont déjà été effectuées, et je n'ai pas eu pour but d'en dire des choses très nouvelles. La naissance de la théorie des extensions de groupes n'avait elle, me semble-t-il, jamais été traitée spécifiquement. J'espère avoir donné un bon aperçu de son évolution jusqu'au début des années 1940. Il me semble notamment qu'un traitement détaillé de l'introduction du multiplicateur de

Schur[8] s'imposait, car la méconnaissance de cet épisode est dommageable historiquement autant qu'elle l'a été mathématiquement dans le premier tiers du vingtième siècle. Le problème tout comme les méthodes considérés par Schur étaient en effet avant-gardistes.

Le théorème 90 de Hilbert ou les résultats du genre "tout morphisme croisé est principal" traduisent une propriété cohomologique en dimension 1. Les "systèmes de facteurs", qui apparaissent à de nombreuses occasions et dans différents domaines, satisfont des relations de type cohomologique. Le "multiplicateur de Schur", le "groupe de Brauer" et ses analogues dans les théories autres que celle des algèbres, qui sont étroitement liés aux systèmes de facteurs, sont maintenant interprétés comme des groupes de cohomologie en dimension 2. Ce sont pour l'essentiel ces résultats et concepts que je recherche systématiquement dans l'analyse menée dans la première partie de ma thèse.

Précisément, mon premier chapitre propose une brève introduction historique aux théories des représentations et algèbres associatives. S'il n'aborde aucune notion directement liée à la cohomologie des groupes, il a cependant un caractère propédeutique en ce qu'il expose les concepts, résultats et problèmes initiaux dont la connaissance est nécessaire pour entreprendre l'étude historique des développements futurs qui, eux, voient intervenir des objets et résultats d'essence cohomologique.

Le deuxième chapitre analyse en détail un article de Schur consacré aux représentations dites projectives. Ce travail de Schur revêt une importance toute particulière dans ma thèse car il présente la première occurrence des systèmes de facteurs et introduit le groupe retenu dans la littérature sous l'appellation "multiplicateur de Schur". D'un point de vue historique plus général, l'article de Schur est tout aussi important en ce qu'il initie à un problème nouveau, celui des extensions de groupes, et propose, via l'application à une question sur les représentations, une méthode générale de construction des extensions qui ne sera reprise que plus de deux décennies plus tard. Cet article a en effet la particularité d'avoir été largement oublié par les contemporains de Schur, peut-être du fait de son avant-gardisme.

Dans le chapitre suivant, j'effectue un tour d'horizon de théories algébriques qui, au cours des années 1920-1930, ont vu apparaître des objets et résultats de nature cohomologique – bien qu'ils ne furent alors, évidemment, pas identifiés comme tels. Ces théories sont celles des représentations et celles des algèbres (auxquelles j'introduis dans le premier chapitre) influencées par des questions issues de la théorie algébrique des nombres. Les systèmes de facteurs tiennent une grande place dans cette étude.

[8]Par Issai Schur lui-même, dans [204].

Il est une autre théorie où les systèmes de facteurs jouent un grand rôle et sont mis en évidence à plusieurs reprises dans les années 1920-1930. Il s'agit bien entendu de la théorie des extensions de groupes, déjà évoquée via l'analyse du travail de Schur. Je consacre le chapitre 4 à l'étude historique du développement de cette théorie jusqu'à 1940, en le mettant en perspective vis-à-vis de l'étude initiale de Schur et en soulignant les similitudes entre les concepts et résultats sur les extensions et ceux, légèrement antérieurs, concernant les représentations et les algèbres.

Dans un deuxième temps, je me penche sur les racines topologiques de la cohomologie des groupes. La cohomologie des groupes étant une théorie résultant du transfert de concepts entre topologie et algèbre, il m'a semblé nécessaire de commencer par discuter de l'algébrisation de la topologie. Le chapitre 5 est donc consacré à un événement qui est souvent présenté comme le point crucial de l'algébrisation de la topologie, à savoir l'émergence de la notion de groupe d'homologie. Je discute la validité de ce jugement et, de manière plus générale, de l'influence de l'algèbre moderne naissante dans le remodelage de la topologie. Ce chapitre permet également de présenter au lecteur ce qu'il est nécessaire de connaître sur la topologie combinatoire (en particulier les complexes), pour appréhender l'étude historique de la topologie de la première moitié du XXe siècle.

Je montre ensuite comment, à partir de là, un problème bien précis a conduit à peu près à lui seul à l'édification de l'homologie des groupes, suivie de peu par celle de la cohomologie. Le chapitre 6 traite du développement de l'homotopie supérieure et de ses rapports avec l'homologie, mis en évidence à l'origine par Witold Hurewicz, puis de l'explicitation algébrique par Heinz Hopf, dans un article de 1942, du lien entre groupe fondamental et deuxième groupe d'homologie.

Le résultat particulier obtenu par Hopf amena à espérer des analogues en toute dimension, donc une compréhension totalement algébrique des résultats topologiques de Hurewicz. Si l'influence de Heinz Hopf apparaît déterminante, on pourra constater que c'est la volonté de comprendre algébriquement des résultats de nature topologique qui est le principal moteur du transfert, nécessaire à la formation de la cohomologie des groupes, de concepts entre algèbre et topologie. Ainsi plusieurs mathématiciens se sont engagés indépendamment et simultanément dans la voie ouverte par Hopf, au premier rang desquels Hopf lui-même, dont j'analyse la contribution dans le chapitre 7. Nous y assistons à la naissance de l'homologie des groupes.

Dans le chapitre 8, j'analyse les travaux indépendants de Hans Freudenthal et de Beno Eckmann aboutissant à l'homologie des groupes, et même à la cohomologie des groupes pour Eckmann. Pour ce faire, j'amorce ce chapitre par une brève étude de la naissance de la cohomologie des espaces.

Je finis par un chapitre uniquement consacré aux figures de Samuel Eilenberg et de Saunders Mac Lane, ainsi qu'à leur collaboration. Nous verrons comment, éveillés au problème de la compréhension algébrique des résultats de Hurewicz par l'article de 1942 de Hopf, Eilenberg et Mac Lane ont élaboré la cohomologie des groupes par leurs propres méthodes et avec des motivations (en particulier la volonté de mieux comprendre et généraliser les systèmes de facteurs) provenant de la théorie algébrique des nombres et de la théorie des extensions de groupes.

Une remarque d'ordre pratique pour finir. Cette thèse est divisée en deux parties, elles-mêmes formées de chapitres ramifiés en sections et sous-sections. Il m'arrivera de renvoyer à certaines sections ou sous-sections précises de ce mémoire. Je le ferai en indiquant d'abord le numéro du chapitre concerné, suivi si besoin est du numéro de la section et, éventuellement de la sous-section. Par 1.3., je désignerai donc la 3e section du premier chapitre, tandis que par 8.1.3. je renverrai à la 3e sous-section de la 1e section du chapitre 8.

Première partie

Sur les racines algébriques de la cohomologie des groupes

Chapitre 1

Introduction historique aux théories des représentations et des algèbres associatives

La seconde moitié du dix-neuvième siècle a vu l'apparition et le développement de nombreux domaines de recherche en algèbre. La théorie des groupes a affirmé son importance au cours de cette période et est un des exemples les plus notables des nouvelles investigations des algébristes de l'époque mais il y en a de nombreux autres comme la théorie de Lie, les corps de nombres algébriques, la théorie des algèbres associatives, les représentations de groupes, etc.

Les deux derniers domaines cités ont leur importance dans l'histoire du développement de la cohomologie des groupes et nous allons donner un aperçu de leurs racines et de leurs premiers développements ; bien qu'il ne soit pas ici question de retracer l'histoire de ces deux disciplines en tant que telles – ce qui a déjà été fait dans une large mesure[1] – un survol de leurs origines est utile pour la compréhension des concepts et des outils qu'elles mettent en jeu, dont certains seront utiles à la compréhension du chapitre 2, ainsi que pour rendre compte de leurs liens mutuels. Comme il ne s'agit ici que d'un survol, nous n'entrerons pas dans les détails des différentes influences qu'elles doivent à d'autres domaines de l'algèbre, comme la théorie de Lie pour les algèbres associatives, et nous renvoyons à la littérature concernant le sujet[2].

Nous commencerons par décrire brièvement les premiers pas de la théorie des algèbres associatives. Nous aborderons plus tard l'évolution de cette théorie à partir de l'article [234] de Wedderburn, qui est une des réalisations

[1] Cf., entre autres, [44] et [176].

[2] Cf. [104] et autres travaux cités précédemment.

les plus importantes sur le sujet. Les recherches en lien avec la structure des algèbres associatives du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle aux années 1930 seront un matériel propice à la mise en évidence de concepts clés dans l'émergence de la cohomologie des groupes.

Nous aborderons ensuite la genèse de la théorie des représentations, en partant de la théorie des caractères de Frobenius. Des liens originels seront mis en évidence entre les représentations et les algèbres, liens qui seront en partie oubliés au cours du développement de ces théories, avant d'être remis en lumière à la fin des années 1920 (en particulier dans les travaux de Richard Brauer, dont nous parlerons en 3.3, et d'Emmy Noether). Nous mentionnerons la présentation que fait Issai Schur de la théorie des représentations en 1905 afin de fournir au lecteur les notions et résultats nécessaires à la compréhension des discussions futures sur les représentations de groupes.

1.1 A propos des algèbres associatives

Le problème de la résolution algébrique des équations a engendré un sujet fécond en discussions, polémiques et tentatives d'explication ; il s'agit du sujet des quantités dites "impossibles"[3] ou "imaginaires"[4] selon les auteurs et les époques, et qui se sont fixées dans notre langage sous l'appellation "nombres complexes"[5]. Ces quantités impossibles apparaissent lors de la résolution d'équations pourtant simples, comme $x^2 + 1 = 0$, dès lors qu'est impliquée une extraction de racine carrée d'un nombre strictement négatif, opération illicite dans le domaine des nombres réels vu que le carré de tout nombre réel est un nombre positif. Désignées comme impossibles, ces solutions furent d'abord rejetées, mais la mise en évidence, entre autres, d'égalités entre des nombres réels et des quantités faisant intervenir ces nombres impossibles[6] et l'utilisation par les plus grands mathématiciens à compter de Descartes de nombres de la forme $a \pm \sqrt{-b}$ [7] amenaient forcément les générations successives de mathématiciens à réfléchir au statut des quantités

[3] Comme le disait Cardan au XVI$^{\text{ème}}$ siècle.

[4] Terminologie employée la première fois par Descartes dans sa *Géométrie* (1637).

[5] L'adjectif "complexe" semble avoir été privilégié à partir du début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, probablement de par l'influence de Gauss (on retrouve notamment la terminologie "complexen Grössen" dans [99], p. 171).

[6] C'est un phénomène qui apparaît fréquemment lorsqu'on utilise les formules de Cardan pour la résolution des équations algébriques du troisième degré. Par exemple l'équation $x^3 = 15x + 4$ conduit à l'égalité $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$.

[7] Jean Bernoulli, par exemple, utilisa des logarithmes de nombres complexes, cf. [232] p. 177.

"impossibles" et à une façon correcte de les définir.

A partir de la toute fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle diverses tentatives de représentation géométrique des nombres complexes virent le jour (par C. Wessel et, un peu plus tard, J. R. Argand notamment). Il semble que le fait d'utiliser le plan pour représenter – voire définir – les nombres complexes ait donné l'idée d'examiner la possibilité de définir des nombres "complexes" pour l'espace[8]. La représentation usuelle des nombres complexes dans le plan consiste à associer au réel 1 et à l'imaginaire pur i deux vecteurs générateurs du plan $\mathbb{R}^2$. Si l'on nomme ces deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout nombre complexe $a + bi$ se voit représenté de manière biunivoque par le vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$. Si maintenant on se donnait un ensemble de quantités pouvant s'exprimer sous la forme $a + bi + cj$, où 1, i et j sont indépendants sur $\mathbb{R}$, on pourrait utiliser l'espace ($\mathbb{R}^3$) pour représenter ces quantités, ainsi que les opérations qui seraient définies entre elles. Le problème soulevé par cette idée est justement de savoir quelles opérations (comme la multiplication) et satisfaisant quelles propriétés (comme l'associativité, la commutativité) peuvent être définies entre de telles quantités.

La dernière phrase de Gauss dans [99] indique qu'il avait établi qu'il n'existe pas de "multiplicité à plus de deux dimensions pouvant fournir des quantités admissibles en arithmétique générale"[9]. Ce passage est obscur car il faut comprendre ce que Gauss entend par "multiplicité" et par "arithmétique générale". Il a semblé à Weierstrass[10] que par ces mots Gauss avait commencé à se demander s'il existait un système de quantités engendrées par un nombre fini d'éléments[11] et dans lequel les opérations classiques de l'arithmétique des réels (à savoir l'addition, la multiplication, la soustraction et la division) pourraient être définies, et qu'il était arrivé à la conviction que ce n'était pas le cas. En termes modernes Gauss aurait senti, si ce n'est démontré, qu'il n'existe aucune extension finie de corps de $\mathbb{R}$ autre que $\mathbb{C}$. Weierstrass a lui-même établi ce résultat lors d'un cours en 1861-62 et l'article [238] (1884) où il cite Gauss en contient la démonstration[12].

William Rowan Hamilton, probablement dans la lignée de tentatives de

[8]Cf. [36] p. 367.

[9]Gauss semble annoncer un travail ultérieur, qui malheureusement ne vit jamais le jour. Précisément il dit : "Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, (...) wo (...) die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

[10]C'est ce qui ressort d'une lettre adressée à H. A. Schwarz, publiée en 1884, cf. [238] pp. 395-396.

[11]que Weierstrass appelle "unités principales" ("Haupteinheiten").

[12]Précisément il prouve l'existence de diviseurs de zéros dès lors qu'il y a strictement plus de deux unités principales.

représentations de quantités complexes dans l'espace, avait établi en 1843 l'existence d'un système – les célèbres quaternions[13] – engendré par 4 unités principales et vérifiant toutes les propriétés de l'arithmétique usuelle, mis à part la commutativité de la multiplication[14].

Les quaternions sont des quantités de la forme $a + bi + cj + dk$, où a, b, c et d sont des réels. 1, i, j et k désignent donc les unités principales. La somme de deux quaternions est définie ainsi :

$$(a+bi+cj+dk)+(a^{'}+b^{'}i+c^{'}j+d^{'}k) = (a+a^{'})+(b+b^{'})i+(c+c^{'})j+(d+d^{'})k.$$

Pour définir le produit entre deux quaternions, il suffit de le définir sur les unités principales (il n'y a plus ensuite qu'à étendre la multiplication par linéarité). Les règles établies par Hamilton sont :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j,$$

$$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

La multiplication est ainsi associative (i.e. si u, v et w sont des quaternions, $(uv)w = u(vw)$), distributive par rapport à l'addition ($u(v+w) = uv+uw$ et $(v+w)u = vu+wu$) mais non commutative (on n'a pas forcément $uv = vu$).

Deux mois après la découverte d'Hamilton, John Graves, à qui Hamilton avait fait part par courrier de sa découverte, put construire un système à l'aide de huit unités principales, dont les éléments portent le nom d'"octaves" ou d'"octonions"[15]. Les mêmes propriétés que celles des quaternions d'Hamilton y sont vérifiées, à l'exception notable de l'associativité de la multiplication.

---

13 Pour un exposé systématique on pourra consulter ses *Lectures on quaternions* (1855).

14 On appelle un tel système une "algèbre à division" ou "corps gauche", pour signifier qu'il s'agit d'un corps où la commutativité fait défaut. Hamilton avait cherché durant des années à construire un système à 3 unités jouissant des propriétés de corps mais s'était heurté à l'existence incontournable de diviseurs de zéros. Il fut plus heureux avec quatre unités, mais en renonçant néanmoins à la commutativité.

En fait, pour une algèbre quelconque, être "à divison" signifie que la division est possible, c'est-à-dire que pour tout couple d'éléments a, b, avec b non nul, il existe un unique x et un unique y tels que $a = bx$ et $a = yb$. Néanmoins, pour une algèbre associative, on donne communément plus de sens au fait d'être à division. Une algèbre associative est en effet dite à division si elle possède un neutre $1 \neq 0$ pour la multiplication et si tout élément non nul a un inverse. C'est notamment la définition donnée par Dickson dans [53], p. 59.

15 Cayley redécouvrit ce système en 1845 et comme Graves n'avait pas publié sa découverte – il ne le fit qu'en 1848 – le nom de Cayley est resté attaché aux octaves au détriment de celui de Graves.

En 1858, dans une étude ([37]) qui fit date, Arthur Cayley crée le calcul matriciel[16], en remarquant en outre que la notation matricielle s'avère commode pour les substitutions linéaires. Il fait également le lien dans son mémoire entre les quaternions et les matrices, en notant qu'un certain sous-ensemble de l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients complexes vérifie la table de multiplication des quaternions[17]. Cela dit, si Cayley définit la somme et le produit sur les matrices, il ne précise pas qu'elles forment une algèbre, et il faudra attendre des points de vue ultérieurs pour réellement exploiter les représentations matricielles des algèbres.

C'est en 1870 qu'est clairement définie cette idée d'une généralisation des nombres complexes vérifiant, si ce n'est toutes, en tout cas le maximum de lois de l'arithmétique gérérale. C'est Benjamin Peirce qui s'en charge dans son mémoire *Linear Associative Algebras*, tout d'abord exposé devant la National Academy of Science de Washington, puis lithographié à cent exemplaires, avant d'être édité de façon posthume en 1881 [178]. Par algèbre linéaire associative[18] il faut entendre un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une multiplication associative, distributive par rapport à l'addition et commutant avec la multiplication d'un vecteur par un nombre. Peirce est peut-être un des premiers à s'intéresser à la structure des algèbres et introduit quelques concepts, comme ceux d'éléments idempotents, nilpotents, ainsi qu'une décomposition ensuite appelée "décomposition de Peirce", qui auront une grande importance dans le développement ultérieur de la théorie.

Sur le continent, la terminologie "quantités complexes" ou "nombres complexes" est privilégiée. Les systèmes de nombres complexes sont à entendre comme une algèbre commutative dans les travaux de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. La terminologie "système hypercomplexe" fait ensuite son apparition et désigne une algèbre associative (mais plus forcément commutative). Cette appellation se trouve essentiellement en Allemagne, chez Frobenius en 1903,

[16]Les matrices furent semble-t-il introduites par Sylvester en 1850 (cf. [216], Tome I, 145-151) mais essentiellement comme une façon commode d'expliquer la formation des déterminants mineurs.

[17]On pourrait dire de façon moderne que Cayley réalise l'algèbre à division des quaternions comme sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ et ceci, via l'identification

$$a + bi + cj + dk \to \begin{pmatrix} a + di & b + ci \\ -b + ci & a - di \end{pmatrix}.$$

[18]Par la suite, les algèbres linéaires associatives furent souvent appelées plus simplement "algèbres associatives" voire "algèbres". Dorénavant, nous utiliserons également ces raccourcis. En particulier, il faudra toujours avoir à l'esprit que lorsque nous parlerons d'une algèbre, il s'agira toujours d'un espace vectoriel de dimension fini sur un corps de base à spécifier.

puis plus tard chez Brauer et Noether par exemple. L'appellation "associative algebra" ou tout simplement "algebra" est plutôt anglo-saxonne (même si l'article [234] de Wedderburn est une exception notable).

Les mathématiques anglo-saxonnes ont été très fertiles lors de la seconde moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle dans le domaine des algèbres, à travers notamment les travaux de Cayley, des Peirce et de Clifford. Le succès des quaternions d'Hamilton et l'introduction des matrices y sont probablement pour beaucoup. Les développements continentaux – principalement en Allemagne – ne sont cependant pas à négliger, et présentent souvent un point de vue différent. Ainsi Frobenius a démontré en 1878 [89] que les seules algèbres à division sur $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et l'algèbre des quaternions[19]. Dans l'article déjà cité [238] de Weierstrass, celui-ci montre que toute algèbre commutative sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et sans élément nilpotent est isomorphe à une somme directe de copies de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ceci fit considérer à Weierstrass que les algèbres commutatives n'offraient rien de bien nouveau[20]. Répondant à Weierstrass dans un article homonyme [49], Dedekind retrouve, de manière plus simple, les résultats de Weierstrass, mais est plus enthousiaste car il remarque que la théorie des corps, telle qu'il l'avait développée en 1871 dans le paragraphe 159 des *Vorlesungen über Zahlentheorie* [56], se ramène à la théorie des systèmes hypercomplexes en remplaçant le corps de base $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, deux mémoires indépendants mais aux résultats assez similaires permirent une avancée importante dans la détermination des structures des algèbres sur $\mathbb{R}$; il s'agit de *Über Systeme höherer complexer Zahlen* [167] (1891) de Theodor Molien et de *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombes complexes* [35] (1898) d'Elie Cartan. Entre autres choses notables, ils introduisent la notion d'algèbre "simple" et prouvent – en des termes différents certes – que toute algèbre simple sur $\mathbb{C}$ est une algèbre de matrices. Nous n'étudierons pas ces travaux mais évoquerons dans un prochain chapitre le *On Hypercomplex Numbers* de Wedderburn [234] qui reprend des idées de Molien et Cartan et démontre le premier grand théorème de structure sur les algèbres simples (en ne se limitant plus à des algèbres sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Même si nous ne pouvons nous lancer dans une étude détaillée de cet article qui ne concerne pas directement la cohomologie des groupes, il est néanmoins de grande valeur pour les résultats, les concepts et les idées de preuve mis en jeu.

[19] Nous noterons cette algèbre $\mathbb{H}$ par la suite.

[20] Cf. [238] p. 411 : "die Arithmetik der allgemeinen complexen Größen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Größen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre".

1.2 F. G. Frobenius : une extension de la notion de caractère

Le mathématicien allemand Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) est la figure de proue de l'édification de la théorie des caractères et des représentations de groupes finis. Dans une série d'articles regroupés sur les années 1896-97, Frobenius définit les caractères d'un groupe fini, puis les représentations, et établit plusieurs résultats les concernant.

La terminologie "Charakter" en elle-même n'était pas nouvelle ; la notion de caractère d'un groupe abélien fini trouve son origine dans les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss[21] et a été réutilisée et reformulée successivement par Dirichlet et Dedekind jusqu'à acquérir sa forme moderne entre les mains d'Heinrich Weber[22], qui y consacre quelques paragraphes de son *Lehrbuch der Algebra*[23]. La définition est, en termes modernes, la suivante[24] :

Soit G un groupe abélien fini. Une application $\chi : G \to \mathbb{C}$ est appelée caractère de G si, pour tous éléments A et B de G, $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$.

Pour Weber, la principale utilité des caractères réside dans l'aide qu'ils apportent à la détermination des sous-groupes d'un groupe abélien fini. Son principal résultat dans cette direction[25] peut être rendu de la façon suivante :

Si un groupe abélien fini G possède un sous-groupe H d'ordre h et d'indice j alors il existe exactement j caratères de G valant 1 pour tout élément de H et tels qu'étant donné un élément quelconque g de $G \backslash H$ il existe au

---

[21] Elle apparaît dans le cadre de l'étude des formes quadratiques, cf. le premier chapitre de [44].

[22] Cf. le deuxième paragraphe de [103].

[23] Plus précisément, cf. [233], deuxième chapitre.

[24] Weber s'emprimait ainsi, paragraphe 11 p. 44 :

"Wenn wir jedem Elemente A irgendwie einen Zahlenwerth zuordnen, so können wir diese Zuordnung eine Function von A nennen. Eine solche Function von A soll nun ein Gruppencharakter genannt werden, wenn sie für je zwei Elemente A, A' von S [le groupe] der Bedingung genügt

$$\chi(AA') = \chi(A)\chi(A'),$$

und folglich auch der allgemeineren

$$\chi(AA'A''...) = \chi(A)\chi(A')\chi(A'')...\text{``}$$

[25] Cf. la proposition 7 du paragraphe 12 de [233].

moins un de ces caractères ayant en g une valeur différente de 1. *L'ensemble de ces caractères forme un groupe isomorphe à G/H.*[26]

Pour être tout à fait clair sur l'état des connaissances et des usages des mathématiciens de l'époque, nous devons rappeler que certains (comme Walter Dyck et Heinrich Weber, eux-mêmes inspirés par les conceptions de Cayley) avaient déjà pris pour habitude de traiter les groupes comme des objets abstraits, dont la nature des éléments était indéterminée (et non plus forcément des permutations ou des transformations par exemple), et de considérer deux groupes isomorphes comme un seul et même objet. La structure des groupes abéliens finis[27], puis des groupes abéliens de type fini[28], fut déterminée au cours des années 1870. Il était bien entendu clairement établi que les valeurs des caractères sont des racines de l'unité, dont l'ordre divise l'ordre du groupe, et que l'ensemble des caractères d'un groupe abélien fini G forme un groupe isomorphe à G.

Comme nous avons commencé à l'évoquer, Frobenius est le principal artisan de la théorie des caractères de groupes finis. Nous allons expliquer rapidement comment s'est effectuée la genèse de cette théorie, et notamment l'édification de la définition de caractère d'un groupe fini, mais il faut tout d'abord avoir à l'esprit que cette définition ne pouvait pas être une simple copie de la définition de caractère de groupe abélien fini. En effet le morphisme trivial est bien souvent le seul morphisme de groupe d'un groupe fini dans $\mathbb{C}$, et l'étude des morphismes de ce groupe, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est donc très limitée...

C'est une lettre de Dedekind à Frobenius, datée du 25 mars 1896, qui conduisit ce dernier à définir avec une très grande rapidité les caractères d'un groupe fini. Le point crucial est le suivant[29]. Dedekind fait part à Frobenius de la notion de déterminant d'un groupe fini, qu'il avait déjà considérée en 1886 – mais au sujet de laquelle il ne publia rien. Soient g_k, $k = 1, ..., n$, les éléments d'un groupe fini G d'ordre n et soient n indéterminées x_i, $i = 1, ..., n$; le déterminant du groupe est défini comme le polynôme $\Theta(x) = Det(x_{g_i g_j^{-1}})_{i,j=1,...,n}$, où x_k et x_{g_k} sont identifiés. Dedekind explique que si G est abélien alors Θ se décompose en un produit de facteurs linéaires,

[26] G étant abélien, tout sous-groupe H est distingué et le quotient G/H forme un groupe abélien. Weber savait également que l'ensemble des caractères d'un groupe abélien fini G formait un groupe, isomorphe à G. Les j caractères obtenus dans cette proposition forment donc précisément le groupe des caractères de G/H.

[27] Cf. [139].

[28] Cf. [96].

[29] Cf. [44] p. 51.

sous la forme $\Theta(x) = \prod_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \psi^s(r) x_r$, où les ψ^s se trouvent être les caractères du groupe. Dedekind a également pu noter sur quelques exemples que, lorsque G n'est pas abélien, $\Theta(x)$ possède des facteurs non linéaires irréductibles. Il propose d'ailleurs l'introduction des systèmes hypercomplexes afin d'élargir le corps des coefficients et de rendre ainsi ces facteurs décomposables en facteurs linéaires[30]. Qu'il ait eu cette idée est loin d'être étonnant vu qu'il avait réfléchi aux systèmes hypercomplexes en 1885,[31] soit un an avant de considérer le déterminant d'un groupe fini. L'attention de Dedekind semblait plus tournée vers la détermination d'un système hypercomplexe minimal sur lequel le déterminant du groupe se décomposerait en facteurs linéaires ; comme le propose Thomas Hawkins[32], on peut imaginer que Dedekind espérait trouver un lien entre des propriétés de ce système et des propriétés du groupe, notamment car il suggéra un rapport entre le nombre de facteurs linéaires du déterminant d'un groupe fini non abélien et ses sous-groupes distingués.

Frobenius n'a manifestement pas été sensible à la volonté de Dedekind d'introduire les nombres hypercomplexes afin de décomposer les facteurs irréductibles du déterminant du groupe[33] – nous allons cependant voir que le lien entre les caractères et les systèmes hypercomplexes se fera malgré tout entre ses mains, bien que d'une façon différente de celle suggérée par Dedekind. Néanmoins, vivement intéressé par la notion de déterminant de groupe, Frobenius demanda à Dedekind s'il possédait plus d'informations sur le rapport entre celui-ci et les sous-groupes du groupe considéré. Dedekind répondit en conjecturant que le nombre de facteurs linéaires de $\Theta(x)$ coïncide avec l'indice du sous-groupe des commutateurs de G.[34]

Ces propos de Dedekind (ici grossièrement résumés) ont semble-t-il suffi à Frobenius pour imaginer et échaffauder la théorie des caractères d'un groupe fini, et ce à une vitesse stupéfiante puisqu'il publia trois articles ([90], [91] et [92]) en lien avec ce sujet au cours de la seule année 1896. Le premier, *Über vertauschbare Matrizen*, ne traite pas en soi de la notion de caractère mais de résultats sur les systèmes hypercomplexes, démontrés via la considération de matrices, et qui sont en termes modernes du ressort de la théorie des

[30] De la même façon que le polynôme $x^2 + x + 1$, irréductible sur $\mathbb{R}$, devient réductible lorsqu'on autorise des coefficiens dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$: $x^2 + x + 1 = (x - j)(x - j^2)$.

[31] Cf. [49].

[32] Cf. [103] p. 51.

[33] Cf. [105] p. 224.

[34] Ce qui fait qu'on y retrouve bien le cas abélien comme cas particulier, vu que dans ce cadre l'indice du sous-groupe des commutateurs (évidemment trivial) est n et le nombre de facteurs linéaires de $\Theta(x)$ est n également, ceux-ci étant paramétrés par les caractères de G.

représentations des algèbres associatives. En introduction, Frobenius revient sur les articles de Weierstrass ([238]) et Dedekind ([49]) – que nous avons déjà évoqués dans la première section – et principalement sur ce qui constitue à ses yeux le point décisif de ces deux articles, à savoir le résultat :

Soient $a_{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha, \beta = 1, ..., n$, $\gamma = 1, ..., m$, mn^2 *quantités quelconques [complexes] vérifiant les relations*

$$\sum_{\lambda} a_{\alpha,\lambda,\gamma} a_{\lambda,\beta,\delta} = \sum_{\lambda} a_{\alpha,\lambda,\delta} a_{\lambda,\beta,\gamma}.$$

Si l'on pose

$$a_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} x_{\gamma},$$

alors $Det((a_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=1,...,n})$ *est un produit de* n *fonctions linéaires des* m *variables indépendantes* x_1,...,x_m.

C'est Dedekind qui a réellement mis en évidence cette proposition. Ses considérations initiales portent sur des systèmes de nombres dits "complexes" ; leurs éléments sont de la forme $x = \sum_{i=1}^{n} e_i \xi_i$, où les ξ_i sont des coefficients (a priori réels ou complexes) et les éléments de base e_i (ou "Haupteinheiten") du système. Par définition, une multiplication associative et commutative est définie entre les éléments du système. Cela fournit en particulier pour les éléments de base les relations $e_r e_s = e_s e_r$ et $(e_r e_s) e_t = (e_r e_t) e_s$ qui, si l'on pose $e_r e_s = \sum_{i=1}^{n} e_i \eta_{i,rs}$, équivalent à :

$$\eta_{t,rs} = \eta_{t,sr}, \tag{1}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_{u,ti} \eta_{i,rs} = \sum_{i=1}^{n} \eta_{u,si} \eta_{i,rt}, u = 1, ..., n. \tag{2}$$

Définissant $\eta_{r,s}$ comme la somme $\sum_{i=1}^{n} \eta_{r,si} \xi_i$, où les ξ_i désignent des variables indépendantes, Dedekind établit que le polynôme $\varphi = Det((\eta_{r,s})_{r,s=1,...,n})$ est un produit de n facteurs linéaires[35].

[35] Cf. la relation (90), [49] p. 157.

La proposition citée par Frobenius est manifestement à peu de choses près analogue au résultat de Dedekind. Pour la démontrer, Frobenius considère m matrices $A_1,...,A_m$, de coefficients généraux $a_{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha, \beta = 1, ..., n$, $\gamma = 1, ..., n$. Les relations $\sum_\lambda a_{\alpha,\lambda,\gamma} a_{\lambda,\beta,\delta} = \sum_\lambda a_{\alpha,\lambda,\delta} a_{\lambda,\beta,\gamma}$ équivalent au fait que ces matrices commutent deux à deux[36]. Si $x_1,...,x_m$ et r désignent des indéterminées et si l'on pose $A = \sum_{\gamma=1}^{m} A_\gamma x_\gamma$ alors Frobenius obtient :

$$Det(A - rI) = \prod_{\kappa=1}^{n} (r_1^{(\kappa)} x_1 + ... + r_m^{(\kappa)} x_m - r),$$

où les $r_\gamma^{(\kappa)}$ désignent les valeurs propres de A_γ.[37] Les coefficients de A sont exactement les $a_{\alpha,\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha,\beta,\gamma} x_\gamma$; le déterminant $Det((a_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=1,...,n})$ est le produit des valeurs propres $r_1^{(\kappa)} x_1 + ... + r_m^{(\kappa)} x_m$, qui sont des facteurs linéaires des x_i.

Dans le même ordre d'idée, Frobenius prouve ensuite le résultat[38] :

Soient $a_{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n$, n^3 quantités quelconques vérifiant les relations

$$a_{\alpha,\beta,\gamma} = a_{\alpha,\gamma,\beta}, \ \sum_\lambda a_{\alpha,\lambda,\gamma} a_{\lambda,\beta,\delta} = \sum_\lambda a_{\alpha,\lambda,\delta} a_{\lambda,\beta,\gamma}.$$

Posons $c_{\kappa,\lambda} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta,\kappa} a_{\beta,\alpha,\lambda}$. Si $Det((c_{\kappa,\lambda})_{\kappa,\lambda=1,...,n})$ est non nul, alors les coefficients des facteurs linéaires intervenant dans l'égalité

$$Det(A - rI) = \prod_{\kappa=1}^{n} (r_1^{(\kappa)} x_1 + ... + r_n^{(\kappa)} x_n - r),$$

[36] Elles expriment les égalités $A_\gamma A_\delta = A_\delta A_\gamma$.

[37] Si deux matrices à coefficients complexes B et C commutent alors elles sont trigonalisables dans une même base ; les valeurs propres de $B + C$ apparaissent alors clairement comme étant sommes de valeurs propres de B et de C. C'est ce résultat, généralisé à une combinaison linéaire de matrices commutant deux à deux, que Frobenius applique à A.

[38] Pour connaître les motivations de Frobenius, cf. [44] pp. 53-54.

sont les uniques solutions des équations[39]

$$r_\beta^{(\kappa)} r_\gamma^{(\kappa)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha,\beta,\gamma} r_\alpha^{(\kappa)}, \;\; \beta, \gamma, \kappa = 1, ..., n.$$

De plus, le déterminant[40] *d'ordre n formé par ces solutions est non nul.*

Frobenius utilise de manière cruciale cette dernière proposition dans l'article *Über Gruppencharaktere* [91] afin de définir les caractères d'un groupe fini. Après y avoir rappelé en introduction la notion de caractère pour un groupe abélien fini, ainsi que quelques-unes de ses principales propriétés, et souligné que sa généralisation de la notion de caractère était un aboutissement de son travail sur des remarques dont lui avait fait part Dedekind au sujet de problèmes liés à la fois aux groupes et aux déterminants, Frobenius se penche sur des propriétés des classes de conjugaison d'un groupe fini.

Il considère un groupe fini quelconque H d'ordre h et possédant un nombre k de classes de conjugaison. Désignant ces classes par les lettres α, β, γ, etc., il nomme h_α, h_β, h_γ, etc. leurs cardinaux respectifs. Notons $h_{\alpha,\beta}$ le nombre de couples (A, B) solutions de l'équation $AB = 1$, où A et B parcourent respectivement les éléments des classes α et β, et $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ le nombre de triplets (A, B, C) solutions de l'équation $ABC = 1$, où A, B et C parcourent respectivement les éléments des classes α, β et γ. Soient en outre $\alpha^{'}$ la classe inverse[41] de la classe α et $a_{\alpha,\beta,\gamma} = \dfrac{h_{\alpha',\beta,\gamma}}{h_\alpha}$; Frobenius prouve l'existence des relations

$$a_{\alpha,\beta,\gamma} = a_{\alpha,\gamma,\beta}$$

et

$$\sum_\lambda a_{\alpha,\lambda,\gamma} a_{\lambda,\beta,\delta} = \sum_\lambda a_{\alpha,\lambda,\delta} a_{\lambda,\beta,\gamma}.$$

Notons $p_{\alpha,\beta} = \sum_{\kappa,\lambda} a_{\kappa,\lambda,\alpha} a_{\lambda,\kappa,\beta}$. Frobenius prouve que le déterminant de ces quantités est non nul. Il en découle, par la proposition précédente, que les équations

$$r_\beta r_\gamma = \sum_\alpha a_{\alpha,\beta,\gamma} r_\alpha$$

---

[39]En réalité, Frobenius écrit ces équations sous la forme condensée $r_\beta r_\gamma = \sum_\alpha a_{\alpha,\beta,\gamma} r_\alpha$. Dans cette expression, r_α désigne finalement une fonction associant à $1, ..., n$ les quantités $r_\alpha^{(1)}, ..., r_\alpha^{(n)}$.

[40]A savoir $Det((r_\alpha^{(\kappa)})_{\alpha,\kappa=1,...,n})$.

[41]C'est-à-dire la classe constituée des inverses des éléments de α.

admettent exactement k solutions distinctes $r_1, ..., r_k$ et que le déterminant d'ordre k formé par ces solutions est non nul. Si en outre x_0,...,x_{k-1} et r désignent des indéterminées et si l'on pose $a_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} x_\gamma$, Frobenius obtient

$$Det((a_{\alpha,\beta} - r\delta_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}) = \prod_{\kappa} (r_0^{(\kappa)} x_0 + ... + r_{k-1}^{(\kappa)} x_{k-1} - r).$$

Frobenius définit finalement les caractères de H comme des fonctions[42] $\chi^{(\kappa)}$ vérifiant la relation

$$r_\alpha^{(\kappa)} = \frac{h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}},$$

où $f^{(\kappa)}$ est un facteur qu'il détermine précisément ultérieurement[43]. Chaque caractère $\chi^{(\kappa)}$ consiste en un système de k nombres $\chi_\alpha^{(\kappa)}$, $\chi_\beta^{(\kappa)}$, etc. Frobenius remanie quelques pages plus loin sa définition d'un caractère $\chi^{(\kappa)}$ en étendant sa source à tous les éléments de H et non plus seulement aux classes ; il pose pour cela $\chi^{(\kappa)}(A) = \chi_\alpha^{(\kappa)}$ si $A \in \alpha$. Ainsi définis les caractères sont bien évidement constants sur les classes de conjugaison de A.[44]

Le déterminant du groupe était l'objet de départ des réflexions de Dedekind et de l'inspiration de Frobenius. Il y revient donc bien naturellement dans la suite de son article. Dedekind avait obtenu que si le groupe considéré était abélien (et fini), son déterminant se décomposait en un produit de facteurs linéaires. Frobenius considère lui un groupe fini H mais a priori non abélien. Pour retrouver une propriété de factorisation du déterminant du groupe en facteurs linéaires, il impose que les indéterminées vérifient les conditions $x_{AB} = x_{BA}$ pour tous éléments A et B de H. Il montre alors que le déterminant $\Theta(x)$ du groupe H vérifie :

$$\Theta(x) = \prod_{\kappa} \left(\frac{1}{f^{(\kappa)}} \sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)} x_\alpha \right)^{g^{(\kappa)}},$$

où $g^{(\kappa)}$ est un entier naturel non nul. On peut noter que le déterminant du groupe possède exactement k facteurs premiers distincts, et qu'à chacun de ces facteurs correspond un caractère.

Son article suivant, *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante* [92], axé sur l'étude du déterminant du groupe et de ses facteurs, montre entre

[42]A chaque κ correspond une fonctions $\chi^{(\kappa)}$ des classes α, β, γ, etc. En fait, on pourrait noter $\chi^{(\kappa)}(\alpha)$ pour $\chi_\alpha^{(\kappa)}$.

[43]Il établit assez rapidement $f^{(\kappa)} = \chi^{(\kappa)}(1)$.

[44]Il est d'usage d'appeler une telle fonction une "fonction de classe".

autres l'égalité $g^{(\kappa)} = (f^{(\kappa)})^2$, et contient de nombreux résultats qu'il utilisera dans le cadre des représentations.

1.3 Sur les représentations de groupes

1.3.1 Les premiers pas de la théorie des représentations

Nous arrivons finalement en 1897 où, sur sa lancée de l'année 1896 et de ses recherches sur les caractères, Frobenius publie l'article *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen* [93] qui introduit pour la première fois la notion de représentation de groupe. Une représentation consiste à attribuer à tous les éléments A, B, C, etc. d'un groupe fini H des matrices inversibles notées (A), (B), (C), etc. telles que si $AB = C$ dans H alors $(A)(B) = (C)$. En termes modernes cela revient à dire qu'il y a un morphisme du groupe H dans le groupe $GL_n(\mathbb{C})$, où n est un certain entier.

Le lien entre la notion de représentation et les travaux précédents sur les caractères est fourni par Frobenius lui-même : étant donné un groupe H d'ordre h, une représentation de H par les matrices (A), (B), etc. et des indéterminées x_A, x_B, etc, il définit la "matrice du groupe H"[45] correspondant à cette représentation comme étant $\sum_{R \in H} (R)x_R$. En particulier, la matrice carrée d'ordre $|H|$ et de terme général[46] $x_{PQ^{-1}}$ est la matrice de groupe associée à une représentation particulière[47], et son déterminant n'est autre que le déterminant du groupe Θ, dont la factorisation est à la base des recherches de Frobenius (et de Dedekind). Frobenius montre d'ailleurs, grâce à un résultat de [92], que le déterminant de la matrice de groupe associée à une représentation[48] quelconque est forcément un diviseur d'une puissance du déterminant du groupe ; ceci implique que les facteurs premiers du déterminant de la représentation sont des facteurs premiers du déterminant du groupe. Il qualifie de "primitive"[49] une représentation dont le déterminant est un facteur pre-

[45] "Die zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörige Matrix". Par la suite, comme la matrice elle-même ne fait pas forcément référence à un groupe donné, on dira plutôt "matrice de groupe".

[46] Les éléments P et Q parcourent H. Il suffit de se donner un ordre sur les éléments de H (ce qui ne pose aucun problème vu qu'ils sont en nombre fini) pour donner un sens à la matrice du groupe H.

[47] Il s'agit selon le langage actuel de la représentation "régulière". Les matrices de cette représentation sont toutes des matrices de permutation (c'est-à-dire dont tous les coefficients sont nuls, mis à part un coefficient exactement par ligne et par colonne valant 1), chaque matrice (R) transcrivant l'action de l'élément R du groupe par translation à droite sur les autres éléments du groupe.

[48] On parlera simplement par la suite de "déterminant de la représentation".

[49] Cette notion coïncide avec celle d'irréductibilité introduite plus tard par Schur, que

mier de Θ. Une représentation (A), (B), (C), etc. étant donnée, il dit que toute représentation de la forme $P(A)P^{-1}$, $P(B)P^{-1}$, $P(C)P^{-1}$, etc., où P est une matrice inversible quelconque, lui est "équivalente". Il montre que pour chaque facteur irréductible Φ de Θ il existe une représentation dont le déterminant est précisément Φ (le nombre de classes d'équivalence de représentations primitives est donc égal au nombre de classes de conjugaison du groupe). Si χ est le caractère associé à Φ, alors

$$Trace((R)) = \chi(R).$$

Ainsi la définition des caractères et les premiers résultats obtenus à leur sujet et au sujet du déterminant du groupe se fondent au sein de la théorie des représentations et y trouvent des formulations plus simples.

Nous avons retracé brièvement les origines et premiers pas de la théorie des caractères et des représentations afin d'en montrer les liens originels avec les systèmes hypercomplexes et afin de permettre au lecteur de comprendre les enjeux premiers de ces domaines de recherche. La théorie des représentations reçut rapidement des contributions, par Frobenius lui-même mais aussi par d'autres, comme Burnside et Schur[50]. Le déterminant du groupe, point de départ de la théorie, s'avéra progressivement de moins en moins primordial. Les propriétés de décomposition du déterminant de la représentation se traduisent aisément, via la théorie de la réduction des matrices, en des propriétés de décomposition de la matrice de groupe en une matrice diagonale par blocs. Ainsi une représentation est "primitive" si et seulement si la matrice de groupe est indécomposable. Pour donner une meilleure idée de la reformulation de la théorie des représentations et des caractères, nous allons nous intéresser à la présentation qu'en fait Issai Schur en 1905 dans son article *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere* [205]. C'est l'occasion d'introduire le travail d'un mathématicien dont certains travaux sollicitent une attention particulière dans le cadre de la naissance de la cohomologie des groupes.

1.3.2 I. Schur : une reformulation de la théorie des représentations

Issai Schur[51] (1875-1941) consacra ses premières années de recherche principalement à l'étude des groupes et à la théorie des représentations. Etudiant

nous introduisons en 1.3.2

[50] Cf. [44].

[51] Pour des informations biographiques sur Issai Schur, on pourra consulter par exemple [44] IV.1.

à Berlin à partir de 1894, il y soutint son doctorat en 1901 puis y fut engagé en tant que Privatdozent en 1903 ; il y demeura jusqu'en 1913. Il côtoya donc Frobenius, à Berlin de manière définitive à compter de 1893, qui fut d'ailleurs membre du jury de son doctorat. Frobenius et Schur travaillant au sein de la même Université sur le même sujet, on peut supposer que le premier a eu une influence certaine sur les recherches du second, et l'on peut noter qu'ils ont œuvré conjointement à l'élaboration de deux articles ([94] et [95]).

Dans [205], Schur se propose de jeter de nouvelles bases pour la théorie des caractères[52]. A vrai dire une refonte de la théorie venait juste d'être proposée par William Burnside ([33] et [34]), mais celle-ci faisait intervenir la théorie des formes hermitiennes, que Schur n'a lui pas intégrée à ses fondations. En outre, le travail de Schur est remarquable car il tire le maximum de bénéfice d'un seul résultat, communément appelé "lemme de Schur".

Schur définit de la même manière que Frobenius les notions de représentation[53] et de matrice de groupe. Il introduit la notion d'équivalence pour les matrices de groupe : deux matrices de groupe X et $X^{'}$ sont dites équivalentes s'il existe une matrice A constante[54], inversible, telle que $X^{'} = AXA^{-1}$.

Une matrice de groupe est dire "réductible" si elle est équivalente à une matrice de groupe de la forme

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ U & X_2 \end{pmatrix},$$

où X_1 et X_2 sont deux matrices carrées. X_1 et X_2 sont alors également des matrices de groupe. Naturellement, une matrice de groupe est dite irréductible si elle n'est pas réductible. Est dite également réductible (resp. irréductible) une représentation dont la matrice de groupe est réductible (resp. irréductible).

Ce qu'on appelle aujourd'hui lemme de Schur est introduit au début du second paragraphe et consiste en deux résultats. Les mots de Schur peuvent être traduits de la façon suivante :

I. *Soient X et $X^{'}$ deux matrices de groupe irréductibles, d'ordres respectifs f et $f^{'}$. Si P est une matrice constante à f lignes et $f^{'}$ colonnes telle que*

$$XP = PX^{'},$$

[52]Théorie des caractères et théorie des représentations semblent pour Schur être réunies en une seule et même entité.

[53]Pour être précis, il ne requiert pas que les matrices de la représentation soient inversibles mais il est légitime de se limiter à des représentations par des matrices inversibles. Schur prouve dans son article que si l'on considère une représentation irréductible alors ses matrices sont toutes inversibles.

[54]Au sens : à coefficients dans le corps de base.

alors soit $P = 0$, soit X et $X^{'}$ sont équivalentes, et P est une matrice carrée d'ordre $f = f^{'}$ et inversible.

II. *Si X est une matrice de groupe irréductible d'ordre f alors toute matrice constante P commutant avec X est de la forme aI_f.*

Comme application immédiate de ce lemme, Schur montre qu'une matrice de groupe irréductible associée à un groupe abélien est forcément d'ordre 1. Il retrouve aussi aisément des propriétés d'orthogonalité analogues à celles qu'avait obtenues Frobenius lors de ses travaux sur les caractères. La notion d'irréductibilité de Schur est bien entendu la même que la notion de primitivité de Frobenius. Schur fait le lien entre les deux via la proposition :

Le déterminant d'une matrice de groupe irréductible est un polynôme[55] irréductible en les h variables x_R. Par conséquent deux matrices de groupe irréductibles sont équivalentes si et seulement si leurs déterminants sont égaux.

Les représentations irréductibles ont un statut privilégié, comme le montrent le lemme de Schur et les diverses propriétés qui en découlent. Il est donc assez naturel que l'étude des représentations réductibles se tourne notamment vers les problèmes de décomposition en sous-représentations irréductibles[56]. Le paragraphe 3 ouvre sur une proposition, à l'origine d'Heinrich Maschke[57], mais retranscrite dans le cadre des représentations et avec une preuve simplifiée :

Si la matrice de groupe X est équivalente à la matrice de groupe

$$X^{'} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ U & X_2 \end{pmatrix},$$

alors elle est également équivalente à la matrice de groupe

$$X^{''} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Cette proposition permet d'établir l'existence d'une décomposition en sous-représentations sous la forme suivante :

[55] Schur utilise le terme “Funktion”.

[56] Burnside, peu avant Schur, s'était également intéressé à ce genre de problèmes, cf. [44], chapitre 3, paragraphe 4.

[57] Ce résultat est parfois appelé “théorème de réductibilité totale de Maschke”. L'énoncé et la démonstration originaux se trouvent dans [158].

Toute matrice de groupe X d'ordre r et de rang n est équivalente à une matrice de groupe de la forme

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & X_m & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & N_{n-r} \end{pmatrix},$$

où X_1, X_2,...,X_m sont des matrices de groupe irréductibles et N_{n-r} la matrice identiquement nulle d'ordre $n-r$.

Il y a également unicité d'une décomposition en sous-représentations irréductibles, s'exprimant ainsi :

Si une matrice de groupe X est équivalente à deux matrices de groupe de la forme $\begin{pmatrix} X_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & X_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & X_m \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} X_1^{'} & 0 & ... & 0 \\ 0 & X_2^{'} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & X_{m'}^{'} \end{pmatrix}$, *où les X_λ et les $X_\mu^{'}$ sont irréductibles , alors $m = m^{'}$ et les matrices de groupe X_1, X_2,...,X_m sont, à l'ordre près, équivalentes aux matrices de groupe $X_1^{'}$, $X_2^{'}$,...,$X_m^{'}$.*

Le paragraphe 4 fait le lien avec la théorie telle que développée initialement par Frobenius. Schur étudie particulièrement la représentation régulière, dont la matrice de groupe est, comme nous l'avons déjà vu, $X = (x_{PQ^{-1}})_{P,Q}$. Schur décompose cette matrice en composantes irréductibles X_0,X_1,...,X_{k-1}, deux sous-matrices de groupe équivalentes étant désignées par une même X_i. Il nomme f_κ et e_κ l'ordre et l'indice[58] de X_κ.

Il prouve que les nombres f_κ et e_κ sont égaux puis que k est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe[59]. Il obtient conséquemment :

Le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles d'un groupe donné est égal aux nombre de classes de conjugaison de ce groupe.

[58]C'est-à-dire le nombre de fois que X_κ apparaît dans la décomposition de X. Il faut noter bien sûr la similarité des notations f_κ et e_κ avec les $f^{(\kappa)}$ et $e^{(\kappa)}$ utilisés par Frobenius. Schur prouve d'ailleurs que ces deux notations désignent en fin de compte les mêmes objets.

[59]Ces résultats avaient déjà été obtenus par Frobenius, cf. plus haut.

Le paragraphe 5 introduit la notion de caractère[60]. Pour Schur, un caractère est par définition attaché à une représentation ; étant donnée une représentation (H_0),(H_1),...,(H_{h-1}) de H, les traces des h matrices de la représentation forment un système de h nombres appelé caractère (correspondant à la représentation – ou à la matrice de groupe). Ce caractère est noté χ et on a donc $\chi(R) = Trace((R))$. Si la représentation correspondant au caractère est irréductible alors Schur appelle ce caractère "simple"[61] ; la proposition précédente implique qu'il y a exactement k caractères irréductibles $\chi^{(0)}$,...,$\chi^{(k-1)}$, correspondant aux k sous-matrices de groupe irréductibles X_0,...,X_{k-1}.

Le nombre $\chi(1) = r$ correspond au rang de la matrice (1) ainsi qu'au rang de la matrice de groupe X. Ce nombre est appelé "degré" du charactère χ. En particulier le degré du caractère irréductible $\chi^{(\rho)}$ est égal à l'ordre f_ρ de X_ρ.

Schur remarque que $\chi(R)$ est somme de r racines de l'unité[62]. Utilisant les propriétés de la trace, il montre que χ prend la même valeur sur tous les éléments d'une même classe de conjugaison. Poursuivant son analyse, Schur retrouve rapidement toutes les propriétés des caractères tels que définis par Frobenius. Il prouve la proposition fondamentale[63] :

Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont même degré[64] et même caractère.

Schur poursuit son analyse durant quelques pages encore avant de conclure son article mais nous ne nous disperserons pas plus sur le sujet des représentations, ayant introduit suffisamment de concepts et de propriétés pour que le lecteur soit à l'aise avec les travaux dont nous parlerons ultérieurement. Nous pouvons maintenant aborder dans le chapitre suivant un article de Schur [204] sur des représentations particulières, dites "projectives". Cet article est d'un intérêt particulier en ce qui concerne l'étude de la naissance de la cohomologie des groupes car il est le premier à faire intervenir les "systèmes de facteurs" dont le rôle prépondérant apparaîtra clairement dans notre

[60] On peut noter à quel point en quelques années la présentation de la théorie s'est trouvée modifiée. Frobenius avait en premier défini et analysé la notion de caractère avant de se rendre compte que cela ouvrait la voie au concept plus général de représentation. Dans les mains de Schur, les caractères se retrouvent au sein de la théorie des représentations et ne sont introduits qu'après que de nombreuses propriétés sur les représentations ont été discutées.

[61] "Einfach". Nous emploierons cependant plutôt l'expression "caractère irréductible".

[62] Cela résulte aisément de ce que $R^h = 1$.

[63] Cf. [205] p. 426.

[64] Le degré d'une représentation est par définition l'ordre des matrices de la représentation, c'est-à-dire l'ordre de la matrice de groupe.

étude. Il est en outre exceptionnel par le problème posé et les méthodes mises en œuvre, assurément inspiratrices de certains procédés typiques de l'algèbre moderne.

Chapitre 2

Représentations projectives et multiplicateur de Schur

Dans ce chapitre, nous analysons une contribution d'Issai Schur (1875-1941), *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen* [204]. Cet article, un de ses premiers, se place dans la lignée de sa dissertation de doctorat – intitulée *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebener Matrix zuordnen lassen* [202] – qui traite des représentations de $GL_n(\mathbb{C})$. Dans [204], quelques mois avant de poser dans [205] de nouvelles bases pour la théorie des représentations privilégiant les outils simples de l'algèbre linéaire[1], Schur s'intéresse à des représentations particulières de groupes finis. L'étude de ces représentations, par des "substitutions linéaires fractionnaires", soulève un problème original dont nous allons discuter, et est l'occasion pour Schur d'introduire un nouvel objet, le "multiplicateur" d'un groupe fini – objet qui tient une place importante dans les premiers pas de la cohomologie des groupes – et d'utiliser (si ce n'est créer même) un raisonnement abstrait, relevant purement de la théorie des groupes, remarquable par les idées mises en jeu et qui est un modèle de raisonnements que l'on retrouvera plus tard lors de l'essor de l'algèbre moderne.

Lorsque Frobenius définit dans [93] une représentation d'un groupe fini, il commence par considérer[2] ce qu'il appelle une substitution linéaire, à savoir un système de variables x_α, combinaisons linéaires de variables y_α :

$$x_\alpha = a_{\alpha 1}y_1 + a_{\alpha 2}y_2 + ... + a_{\alpha n}y_n,\ \alpha = 1, ..., n.$$

Si (A) désigne la substitution précédente, (B) une deuxième, de la forme $x_\alpha = b_{\alpha 1}y_1 + b_{\alpha 2}y_2 + ... + b_{\alpha n}y_n$, alors on peut former une troisième substitution

[1] Cf. chapitre 1.

[2] C'est le tout début du paragraphe 2 de [93].

(C) à l'aide de (A) et (B), de la forme $x_\alpha = c_{\alpha 1}y_1 + c_{\alpha 2}y_2 + ... + c_{\alpha n}y_n$, où $c_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}$, et on dit qu'on a l'égalité $(C) = (A)(B)$.

Frobenius indique immédiatement qu'on peut considérer, à la place des substitutions linéaires, les matrices qui leur sont associées, de coefficient général $a_{\alpha\beta}$, et travailler plutôt avec elles[3]. Il définit finalement une représentation de groupe en associant à chaque élément A du groupe une matrice (A), mais il est naturellement équivalent de considérer qu'on associe à chaque élément du groupe une substitution linéaire[4].

Schur se propose dans [204] d'étudier les représentations de groupes finis par des substitutions linéaires "fractionnaires" ("gebrochene"). Il s'agit de substitutions de la forme

$$\{A\} \qquad x_\nu = \frac{a_{\nu 1}y_1 + ... + a_{\nu,n-1}y_{n-1} + a_{\nu n}}{a_{n1}y_1 + ... + a_{n,n-1}y_{n-1} + a_{nn}}, \ \nu = 1, ..., n-1.$$

Les substitutions linéaires sont, pour les différencier des fractionnaires, qualifiées d'entières.

Si l'on se donne un groupe $\mathfrak{H}$, on a une représentation de ce groupe par des substitutions linéaires fractionnaires dès lors qu'à chacun de ses éléments A est associée une substitution, de déterminant non nul, de la forme $\{A\}$, de telle sorte que pour tous éléments A et B de $\mathfrak{H}$, $\{AB\} = \{A\}\{B\}$.

On peut également interpréter les représentations par des substitutions linéaires fractionnaires de Schur comme des représentations par des "collinéations"[5]. Si l'on considère l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$, dont les points sont les droites vectorielles de $\mathbb{C}^n$, une collinéation est une application de $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ définie par une substitution linéaire associée à une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. En l'occurrence, pour la collinéation notée plus haut $\{A\}$, une matrice associée est la matrice notée (A), de coefficient général $a_{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 1, ..., n$. Mais à la collinéation $\{A\}$ correspondent en fait plusieurs matrices : (A) et tous les multiples $a(A)$, $a \in \mathbb{C}^\times$.

Comme le remarque Schur, une représentation de $\mathfrak{H}$ par des substitutions linéaires fractionnaires est une notion équivalente à une représentation matricielle de $\mathfrak{H}$, où les matrices (A), (B), etc. associées aux éléments A, B, etc. vérifient non plus $(AB) = (A)(B)$, mais $(A)(B) = r_{A,B}(AB)$, où $r_{A,B}$ est un

---

[3]Vu que $c_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}$, on a bien l'égalité $(C) = (A)(B)$ qui est vérifiée pour les matrices associées aux substitutions linéaires.

[4]Ce point de vue, suggéré par la présentation que fait Frobenius, a pourtant été souvent négligé au profit des matrices qui offrent de nombreuses possibilités en termes de calcul.

[5]L'explication qui suit est tirée de [44], p. 166.

nombre complexe non nul[6]. Une telle représentation est dite “projective”. Les représentations telles que définies par Frobenius sont des cas particuliers des représentations “projectives”, où $r_{A,B} = 1$, et sont dites “ordinaires”.

Schur considère donc en fin de compte des représentations d'un groupe fini $\mathfrak{H}$ par des matrices inversibles (A), (B), etc. soumises aux conditions $(A)(B) = r_{A,B}(AB)$. Une représentation $(A^{'})$, $(B^{'})$, ... est dite associée à la représentation (A), (B), ... s'il existe des constantes a, b, ... telles que pour tous les éléments A, B, ... de $\mathfrak{H}$, $(A^{'}) = a(A)$, $(B^{'}) = b(B)$, ... Dire que deux représentations sont associées revient à dire qu'elles définissent les mêmes substitutions linéaires fractionnaires.

Schur reprend quelques définitions héritées des représentations ordinaires. Ainsi deux représentations (projectives) (A), (B), etc. et $(A^{'})$, $(B^{'})$, etc. sont dites équivalentes s'il existe une matrice P inversible telle que

$$(A^{'}) = P^{-1}(A)P, \ (B^{'}) = P^{-1}(B)P, \text{ etc.}$$

Il est clair que deux représentations équivalentes correspondent à un même système de nombres $(r_{A,B})_{A,B}$.

Une représentation est dite “primitive”[7] s'il n'existe aucune représentation équivalente $(A^{'})$, $(B^{'})$, etc. de $\mathfrak{H}$ de la forme

$$(A^{'}) = \begin{pmatrix} (A_1) & 0 \\ 0 & (A_2) \end{pmatrix}, \ (B^{'}) = \begin{pmatrix} (B_1) & 0 \\ 0 & (A_2) \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

où (A_1), (B_1), etc. sont de même ordre.

[6]Si l'on a la substitution linéaire fractionnaire $\{B\}$,

$$\{B\} \qquad x_\nu = \frac{b_{\nu 1}y_1 + ... + b_{\nu,n-1}y_{n-1} + b_{\nu n}}{b_{n1}y_1 + ... + b_{n,n-1}y_{n-1} + b_{nn}}, \ \nu = 1, ..., n-1,$$

et $\{A\}$ comme plus haut, alors la substitution $\{A\}\{B\}$,

$$\{A\}\{B\} \qquad x_\nu^{'} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_{\nu i} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}y_j + b_{in}}{\sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}y_j + b_{nn}} + a_{\nu n}}{\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}y_j + b_{in}}{\sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}y_j + b_{nn}} + a_{nn}}, \ \nu = 1, ..., n-1,$$

$$x_\nu^{'} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}b_{ij})y_j + \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}b_{in}}{\sum_{j=1}^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{ij})y_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in}}, \ \nu = 1, ..., n-1.$$

est égale à la substition correspondant à la matrice $(A)(B)$, et correspond donc à toute matrice de la forme $\alpha(A)(B)$, où α est un élément de $\mathbb{C}^\times$.

[7]On dira plutôt “irréductible” afin de suivre la terminologie actuelle, d'ailleurs introduite par Schur lui-même peu après dans [205].

2.1 Le multiplicateur de Schur

Dès le premier paragraphe de [204], Schur considère donc un groupe $\mathfrak{H}$ d'ordre h et note ses éléments $H_0 = E$, H_1,..., H_{h-1}. Il considère une représentation (projective) de $\mathfrak{H}$ par des matrices (H_0), (H_1),...,(H_{h-1}) correspondant au système de nombres $(r_{P,Q})$, c'est-à-dire vérifiant :

$$(P)(Q) = r_{P,Q}(PQ), P, Q \in \mathfrak{H}.$$

L'associativité de la multiplication fait que l'on a à la fois $(P)(Q)(R) = (PQ)(R)$ et $(P)(Q)(R) = (P)(QR)$, ce qui impose les relations :

$$(A.) \qquad r_{P,Q}r_{PQ,R} = r_{P,QR}r_{Q,R}, \; P, Q, R \in \mathfrak{H}.$$

Par conséquent, si l'on se donne une représentation projective de $\mathfrak{H}$ correspondant au système de nombres $(r_{P,Q})$, alors ce système vérifie les relations $(A.)$. Schur montre réciproquement qu'à tout système de nombres $(r_{P,Q})$ vérifiant $(A.)$ correspond une représentation projective de $\mathfrak{H}$ (on peut vérifier que la représentation de matrice de groupe $X = (r_{PQ^{-1},Q}x_{PQ^{-1}})_{P,Q}$ convient). Par commodité, nous appellerons un système de h^2 nombres $r_{P,Q}$ vérifiant $(A.)$ un "système de facteurs"[8].

Il existe une infinité de systèmes de facteurs. En effet si un système $(r_{P,Q})$ vérifie $(A.)$ alors il en va de même de tout système $(r'_{P,Q})$ où

$$(1) \qquad r'_{P,Q} = \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}} r_{P,Q}$$

et les c_{H_i} sont des complexes non nuls.

Deux systèmes de facteurs $(r_{P,Q})$ et $(r'_{P,Q})$, tels que des constantes non nulles c_{H_i} vérifiant $r'_{P,Q} = \dfrac{c_P c_Q}{c_{PQ}} r_{P,Q}$ se laissent déterminer, sont dits associés. Si deux représentations correspondant respectivement aux systèmes $(r_{P,Q})$ et $(r'_{P,Q})$ sont associées, alors nécessairement ces systèmes sont eux-mêmes associés.

Schur considère réunis en une même classe tous les systèmes de facteurs associés[9]. Il montre que le nombre de ces classes est fini[10] et note ce nombre

[8] Cette terminologie n'est pas utilisée par Schur dans [204] mais nous verrons apparaître plus tard un concept similaire chez Noether par exemple, dans [173], sous l'appellation "Faktorensystem", ou encore chez Mac Lane et Schilling dans [156] sous le nom "factor set".

[9] Schur ne le précise pas mais le fait d'être associés pour deux systèmes est une relation d'équivalence.

[10] Partant de $(R)(S) = r_{R,S}(RS)$, et prenant le déterminant, Schur obtient $r^h_{R,S} = \dfrac{d_R d_S}{d_{RS}}$,

m. A partir de deux systèmes de facteurs $(r^{(\lambda)}_{P,Q})$ et $(r^{(\mu)}_{P,Q})$, appartenant respectivement aux classes K_λ et K_μ, Schur en construit un troisième, qui est le produit de ces deux systèmes : ses éléments sont $r^{(\lambda)}_{P,Q}r^{(\mu)}_{P,Q}$. Si le système ainsi obtenu appartient à la classe K_ν alors K_ν peut être vu comme le produit des classes K_λ et K_μ et on écrit $K_\nu = K_\lambda K_\mu$. Ce produit entre classes est bien défini car K_ν est indépendante du choix des représentants $(r^{(\lambda)}_{P,Q})$ et $(r^{(\mu)}_{P,Q})$ des classes K_λ et K_μ. Il est évident que le produit ainsi défini sur les classes est commutatif, ce qui permet finalement à Schur d'établir :

I. *Les m classes K_0, K_1,..., K_{m-1} forment un groupe abélien d'ordre m noté $\mathfrak{M}$, dont l'élément neutre consiste en la classe K_0 contenant le système $(r_{P,Q} = 1)$. $\mathfrak{M}$ est appelé le multiplicateur de $\mathfrak{H}$.*[11]

En outre, vu que $r^h_{R,S} = \dfrac{d_R d_S}{d_{RS}}$, tout élément de $\mathfrak{M}$ est d'ordre un diviseur de h.

2.2 Extensions de groupes et représentations

Dans le deuxième paragraphe, Schur introduit un groupe $\mathfrak{G}$, qui est une "extension centrale"[12] quelconque du groupe $\mathfrak{H}$ par un groupe abélien $\mathfrak{A}$. Pour

où d_R et d_S désignent les déterminants de (R) et de (S). Désignant par δ_P, δ_Q, etc. des racines h-ièmes quelconques de d_P, d_Q, etc., il considère le système $(s_{P,Q})$ – associé à $(r_{P,Q})$ – défini par :

$$s_{P,Q} = \frac{\delta_P^{-1}\delta_Q^{-1}}{\delta_{PQ}^{-1}} r_{P,Q}.$$

Clairement, $s^h_{P,Q} = 1$. Schur montre ainsi que dans chaque classe se trouve un système dont les éléments sont tous des racines h-ièmes de l'unité. Comme il n'existe qu'un nombre fini de tels systèmes (précisément $(h)^{h^2}$), le nombre de classes est fini.

[11]L'ordre dans lequel procède Schur pour construire ce groupe peut ne pas paraître totalement satisfaisant pour le lecteur moderne. Schur introduit directement une loi de groupe sur les classes, alors qu'elle existe d'abord sur les systèmes de facteurs. L'ensemble $\mathcal{S}$ des systèmes de facteurs est muni d'une multiplication (coordonnée par coordonnée) qui en fait un groupe abélien. Le fait d'être associé pour deux systèmes de facteurs est une relation d'équivalence sur $\mathcal{S}$. En faisant passant $\mathcal{S}$ au quotient par cette relation, on obtient un groupe ; c'est ce groupe que Schur note $\mathfrak{M}$.

[12]Schur parle simplement d'"extension" : "eine durch die Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$". Or la définition moderne d'extension ne requiert pas que le groupe par lequel se fait l'extension soit central. Nous emploierons donc volontairement la terminologie "extension centrale" pour qualifier les extensions que considère Schur, bien que dans son appellation Schur ne précise pas leur caractère central.

Schur, cela signifie[13] que $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe central[14] de $\mathfrak{G}$ et que $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ est isomorphe à $\mathfrak{H}$.

Avec le formalisme moderne des suites exactes, dire que $\mathfrak{G}$ est une extension de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{A}$ est équivalent à dire qu'on a une suite exacte[15] :

$$1 \to \mathfrak{A} \xrightarrow{i} \mathfrak{G} \xrightarrow{p} \mathfrak{H} \to 1.$$

Comme $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ est isomorphe à $\mathfrak{H}$, à tout élément H_λ de $\mathfrak{H}$ correspond de manière biunivoque une classe $\mathfrak{A}G_\lambda$ de $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$.[16] Schur écrit donc $\mathfrak{G}$ sous la forme :

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}G_0 + \mathfrak{A}G_1 + ... + \mathfrak{A}G_{h-1},\ G_0 = E,$$

ce qu'il faut comprendre ainsi : tout élément de $\mathfrak{G}$ s'écrit de manière unique sous la forme AG_λ, $A \in \mathfrak{A}$.

La table de multiplication de $\mathfrak{H}$ se traduit par des relations

$$H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)},\ \lambda, \mu = 0, 1, ..., h-1, \tag{2}$$

dont on déduit l'existence d'éléments $A_{\lambda,\mu}$ de $\mathfrak{A}$ tels que

$$G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)},\ \lambda, \mu = 0, 1, ..., h-1, \tag{3}$$

et vérifiant en outre $A_{0,\lambda} = A_{\lambda,0} = E$.

Schur remarque le fait suivant : si l'on se donne une représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ faisant correspondre à tout élément G la matrice (G) alors, vu que les éléments de $\mathfrak{A}$ commutent avec tous les éléments de $\mathfrak{G}$, le lemme de Schur nous dit que pour tout élément A de $\mathfrak{A}$, (A) est de la forme $\psi(A)Id$. En outre ψ est un caractère[17] du groupe abélien $\mathfrak{A}$. Si l'on désigne par a le cardi-

[13] Schur explique ce qu'il entend par "extension" en introduction. On peut noter qu'il ne définit ce concept que pour des groupes finis. Nous aborderons plus en détail la notion d'extension dans un chapitre ultérieur mais nous donnons néanmoins déjà ici quelques explications nécessaires à la compréhension du concept, et une approche moderne de celui-ci.

[14] i. e. inclus dans le centre de $\mathfrak{G}$, le centre d'un groupe étant l'ensemble des éléments du groupe commutant avec tous les élément du groupe.

[15] On dit d'une suite de morphismes qu'elle est exacte lorsque l'image de tout morphisme coïncide avec le noyau du suivant. Dans la suite exacte donnée ici comme définition d'une extension de groupes, il faut donc comprendre que i est un morphisme de groupes injectif, que p est un morphisme de groupes surjectif, et que $Ker(p) = Im(i)$. Avec cette présentation, $\mathfrak{A}$ n'est pas forcément un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ comme le désire Schur, mais $i(\mathfrak{A})$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ isomorphe à $\mathfrak{A}$.

Schur note ses groupes multiplicativement. Il désigne le neutre par la lettre E mais il est plutôt d'usage maintenant de noter le neutre pour la multiplication 1. Le 1 apparaissant dans la suite exacte doit être compris comme le groupe réduit à l'élément neutre 1.

[16] G_λ est un élément de $\mathfrak{G}$ tel que $p(G_\lambda) = H_\lambda$. On fait ici, et une fois pour toutes, un choix de représentants G_λ.

[17] La relation $(AB) = (A)(B)$, pour A et B éléments de $\mathfrak{A}$, implique $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$.

nal de $\mathfrak{A}$, ψ est donc un des a caractères, que l'on notera $\psi^{(\alpha)}$, $\alpha = 0, ..., a-1$, de $\mathfrak{A}$. Via la représentation, la relation (3) donne

$$(G_\lambda)(G_\mu) = \psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu})(G_{\varphi(\lambda,\mu)}).$$

Notons $\psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}) = r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu}$. Si l'on fait correspondre à tout élément H_λ de $\mathfrak{H}$ la matrice (G_λ) on obtient une représentation projective de $\mathfrak{H}$, correspondant au système $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu})$.

Ainsi Schur, s'étant donné une représentation ordinaire irréductible de $\mathfrak{G}$, correspondant nécessairement à un caractère $\psi^{(\alpha)}$ de $\mathfrak{A}$, construit une représentation projective de $\mathfrak{H}$ correspondant au système $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu} = \psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}))$. Mais il montre en fait mieux que cela. Du moment qu'il existe une représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ correspondant au caractère $\psi^{(\alpha)}$, il peut obtenir toutes les représentations projectives de $\mathfrak{H}$ correspondant au système $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu})$ à partir de représentations de $\mathfrak{G}$.[18]

Que signifie précisément obtenir une représentation projective à partir d'une représentation ordinaire ? Voici une vision moderne, que nous espérons clarifiante, des propos de Schur. Notons s l'application de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$ envoyant chaque H_λ sur G_λ (s est donc telle que $p \circ s = id_{\mathfrak{H}}$). Etant donnée une représentation projective quelconque R de $\mathfrak{H}$ – qui est donc une application de $\mathfrak{H}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$, pour un certain entier n – correspondant à $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu})$, il existe une représentation R' de $\mathfrak{G}$ telle que $R' \circ s = R$. On peut dire que toute représentation projective de $\mathfrak{H}$ associée à $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu})$ est “relevée”[19] en une représentation ordinaire de $\mathfrak{G}$.

$(D1)$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G} \arrow[dr, dotted, "R'"] & \\
\mathfrak{H} \arrow[u, "s"] \arrow[r, "R"'] & GL_n(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Si R fait correspondre aux éléments H_0, H_1,..., H_{h-1} de $\mathfrak{H}$ les matrices $R(H_0)$, $R(H_1)$,...,$R(H_{h-1})$ alors R', définie sur $\mathfrak{G}$ par $R'(AG_\lambda) = \psi^{(\alpha)}(A)R(H_\lambda)$, convient.

De plus Schur sait, en vertu d'un résultat de Frobenius[20], que pour tout caractère $\psi^{(\alpha)}$ il existe une représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ lui correspon-

[18] Ou, dit autrement, pour toute représentation de $\mathfrak{H}$ par des substitutions linéaires fractionnaires, il peut obtenir une représentation qui lui est associée à partir d'une représentation par des substitutions linéaires entières de $\mathfrak{G}$.

[19] Cf. par exemple [46] p. 361.

[20] Cf. [91], paragraphe 7.

dant. Il établit donc finalement ce qu'on peut condenser dans la proposition suivante :

II. *Soit* $\mathfrak{G}$ *une extension centrale de* $\mathfrak{H}$ *par le groupe abélien* $\mathfrak{A}$. *Alors, d'une part, pour tout caractère* $\psi^{(\alpha)}$ *de* $\mathfrak{A}$ *il existe une représentation irréductible de* $\mathfrak{G}$ *correspondant à* $\psi^{(\alpha)}$ *et une représentation projective de* $\mathfrak{H}$ *correspondant au système* $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu} = \psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}))$. *Et, d'autre part, toute représentation projective de* $\mathfrak{H}$ *correspondant à* $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu})$ *peut être relevée en une représentation ordinaire de* $\mathfrak{G}$.

Schur constate que les a caractères $\psi^{(\alpha)}$, $\alpha = 0, ..., a-1$, de $\mathfrak{A}$ fournissent a systèmes de nombres $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu})$ solutions de $(A.)$. Il pense qu'en général plusieurs de ses systèmes doivent être associés et se demande combien d'éléments du multiplicateur de Schur $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{H}$ admettent un représentant parmi ces systèmes. Il note $m^{'}$ le nombre de tels éléments.

$\mathfrak{A}$ est isomorphe au groupe de ses caractères : à tout élément A de $\mathfrak{A}$, on peut donc faire correspondre de manière biunivoque un caractère ψ_A. Schur montre que l'ensemble des caractères de $\mathfrak{A}$ qui sont des restrictions de caractères de $\mathfrak{G}$ forme un groupe, d'un certain cardinal b, qui est donc isomorphe à un sous-groupe – qu'il note $\mathfrak{B}$ – de $\mathfrak{A}$. Schur prouve que si deux caractères ψ_B et ψ_C fournissent des systèmes $(\psi_B(A_{\lambda,\mu}))$ et $(\psi_C(A_{\lambda,\mu}))$ qui sont associés, alors BC^{-1} est un élément de $\mathfrak{B}$. En fait, si l'on écrit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}A_0 + \mathfrak{B}A_1 + ... + \mathfrak{B}A_{m^{'}-1},$$

alors les $m^{'}$ systèmes $(r^{(\alpha)}_{H_\lambda,H_\mu} = \psi_{A_\alpha}(A_{\lambda,\mu}))$, $\alpha = 0, ..., m^{'}-1$, sont des représentants de $m^{'}$ classes différentes, dont on voit aisément qu'elles forment un sous-groupe $\mathfrak{M}^{'}$ de $\mathfrak{M}$. Le groupe $\mathfrak{M}^{'}$ est isomorphe à $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ et $m^{'} = \dfrac{a}{b}$.

En introduction, Schur avait posé le problème suivant[21] : pour tout groupe fini $\mathfrak{H}$, peut-on trouver une extension centrale $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}$ telle que toute représentation irréductible de $\mathfrak{H}$ par des substitutions linéaires fractionnaires (ou une qui lui est associée) soit équivalente à une représentation de $\mathfrak{H}$ fournie par $\mathfrak{G}$? En d'autres termes, existe-t-il une extension centrale $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}$ telle que toute représentation projective irréductible[22] (ou une qui lui est associée) de $\mathfrak{H}$ soit équivalente à une représentation qui se relève en une représentation ordinaire de $\mathfrak{G}$? Un tel groupe $\mathfrak{G}$, s'il existe, est dit par Schur "suffisamment étendu" ("eine hinreichend ergänzte Gruppe"). Un groupe d'ordre minimal

[21] Cf. [204] p. 23.

[22] On peut, et cela revient au même, demander la même chose pour toute représentation projective non forcément irréductible.

parmi les groupes suffisamment étendus est appelé "groupe de représentation de $\mathfrak{H}$" ("Darstellungsgruppe"). Schur montre à la fin du deuxième paragraphe qu'étant donnée une extension centrale $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{A}$, le groupe $\mathfrak{D} = [\mathfrak{G} : \mathfrak{G}] \bigcap \mathfrak{A}$ est isomorphe à $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, lui-même isomorphe à $\mathfrak{M}'$. Ainsi,

III. *Pour toute extension centrale $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}$ par un groupe abélien $\mathfrak{A}$, l'intersection du sous-groupe des commutateurs $[\mathfrak{G} : \mathfrak{G}]$ et de $\mathfrak{A}$ est un groupe $\mathfrak{D}$ isomorphe à un sous-groupe du multiplicateur de $\mathfrak{H}$.*

En particulier, si d désigne le cardinal de $\mathfrak{D}$, $d = m' = \dfrac{a}{b}$. Si $\mathfrak{G}$ est un groupe suffisamment étendu, alors $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ et donc $d = m' = \dfrac{a}{b} = m$. On peut notamment remarquer que m divise a.

Issai Schur conclut donc ce deuxième paragraphe en donnant des conditions nécessaires vérifiées par un groupe suffisamment étendu. Comme m divise a, un groupe suffisamment étendu a pour cardinal au minimum mh, vu que son cardinal est le produit des cardinaux de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{H}$. Dans le troisième paragraphe de [204], Schur montre que pour tout groupe fini $\mathfrak{H}$ il existe un groupe suffisamment étendu. Il fait même bien mieux que cela vu qu'il donne un procédé général de construction d'une extension centrale $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}$, suffisamment étendue, et de cardinal mh. Il obtient ainsi un groupe de représentation de $\mathfrak{H}$.

Avant d'aborder cette construction, revenons sur la définition d'un groupe de représentation. La proposition II et les considérations qui y aboutissent mènent à se rendre compte que l'on peut attendre plus de propriétés d'un groupe de représentation. Schur se contente de demander que toute représentation projective irréductible (ou une qui lui est associée) de $\mathfrak{H}$ soit équivalente à une représentation qui se relève en une représentation ordinaire de $\mathfrak{G}$. Pour autant on peut reprendre les raisonnements de Schur pour montrer que demander que toute représentation projective de $\mathfrak{H}$ soit associée à une représentation qui se relève en une représentation ordinaire de $\mathfrak{G}$ n'est pas plus contraignant. En effet il est nécessaire et suffisant, pour obtenir un groupe de représentation au sens de Schur, de faire une extension de $\mathfrak{H}$ par un groupe abélien $\mathfrak{A}$ qui soit tel que parmi les systèmes $(\psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}))$ obtenus à partir des caractères $\psi^{(\alpha)}$ de $\mathfrak{A}$ se trouve au moins un représentant de chaque classe de systèmes de $\mathfrak{M}$. Si donc $\mathfrak{A}$ vérifie cette propriété, et si (r'_{H_λ,H_μ}) est un système quelconque, ce système est dans la même classe que $(\psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}))$

pour un certain α. Ainsi il existe des constantes non nulles c_{H_λ} telles que :

$$\forall \lambda, \mu = 0, ..., h-1, \; r'_{H_{\lambda,\mu}} = \frac{c_{H_\lambda} c_{H_\mu}}{c_{H_\lambda H_\mu}} \psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}).$$

Soit une représentation projective quelconque $R : \mathfrak{H} \to GL_n(\mathbb{C})$ correspondant à (r'_{H_λ, H_μ}). La représentation

$$\begin{array}{rccc} \tilde{R}: & \mathfrak{H} & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & H_\lambda & \mapsto & c_{H_\lambda}^{-1} R(H_\lambda), \end{array}$$

est une représentation projective de $\mathfrak{H}$ correspondant au système $(\psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}))$, associée à la représentation R. Maintenant,

$$\begin{array}{rccc} R': & \mathfrak{G} & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & AG_\lambda & \mapsto & \psi^\alpha(A)\tilde{R}(H_\lambda), \end{array}$$

est une représentation ordinaire de $\mathfrak{G}$ telle que $R'(G_\lambda) = \tilde{R}(H_\lambda)$, donc relevant $\tilde{R}$. On a ainsi construit, étant donnée une représentation projective quelconque R de $\mathfrak{H}$, une représentation ordinaire R' de $\mathfrak{G}$ relevant la représentation $\tilde{R}$ associée à R.

Nous profitons encore de cet aparté pour donner une formulation moderne du problème, soulevé par Schur, de l'existence d'un groupe de représentation. On note $PGL_n(\mathbb{C})$ le groupe projectif linéaire de $\mathbb{C}^n$, qui est défini comme le quotient de $GL_n(\mathbb{C})$ par son centre (en l'occurrence le sous-groupe des homothéties). On note $\alpha_n : GL_n(\mathbb{C}) \to PGL_n(\mathbb{C})$ la projection canonique. Une représentation projective de $\mathfrak{H}$ et toutes celles qui lui sont associées correspondent à un seul et même morphisme de $\mathfrak{H}$ dans $PGL_n(\mathbb{C})$. Un groupe de représentation $\mathfrak{G}$ du groupe fini $\mathfrak{H}$ peut donc être présenté comme un groupe d'ordre minimal vérifiant la propriété : *il existe un morphisme p : $\mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ tel que pour tout n et tout morphisme $R : \mathfrak{H} \to PGL_n(\mathbb{C})$, il existe un unique morphisme R' : $\mathfrak{G} \to GL_n(\mathbb{C})$ rendant le diagramme suivant "commutatif"*[23] :

(D2)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[r, "R'"] \arrow[d, "p"'] & GL_n(\mathbb{C}) \arrow[d, "\alpha_n"] \\ \mathfrak{H} \arrow[r, "R"'] & PGL_n(\mathbb{C}). \end{tikzcd}$$

[23]L'expression "diagramme commutatif" est typique du langage des catégories, en vogue aujourd'hui en algèbre. Dire qu'un diagramme (la donnée d'objets et de flèches entre ces objets) est "commutatif" signifie qu'entre deux objets quelconques A et B du diagramme, toutes les flèches obtenues comme composition de flèches menant de A à B sont égales. Pour le diagramme (D2), cela signifie simplement $\alpha_n \circ R' = R \circ p$.

Pour une présentation et des démonstrations modernes des résultats de Schur sur les représentations projectives, dans la lignée de ce qui vient d'être proposé, on pourra consulter par exemple [128], notamment les paragraphes 23 et 24 du chapitre 5. Un exposé moins abstrait est également entrepris par [46], § 53. L'existence du groupe de représentation, et de manière générale tous les résultats de Schur mentionnés ici, sont également valables si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

2.3 Construction des groupes de représentation

Dans le troisième paragraphe de [204], Schur montre donc que pour tout groupe fini $\mathfrak{H}$ d'ordre h il existe un groupe suffisamment étendu d'ordre mh – qui est, au vu de ce qui a été dit précédemment, un groupe de représentation. Schur adopte une méthode abstraite et générale, en prenant le point de vue de la présentation des groupes par générateurs et relations (dont il n'est certes pas le créateur, l'idée remontant à Walter Dyck [58]), se concentrant ainsi sur les relations apparaissant nécessairement entre les éléments d'un groupe de représentation plutôt que sur ses propriétés caractéristiques (propriétés qui peuvent d'ailleurs être utilisées pour définir les groupes de représentation, comme dans [128], p. 630).

Schur commence par introduire des générateurs Q_0, Q_1,..., Q_{h-1} (qu'on peut considérer comme des indéterminées) et définit h^2 éléments J_{H_λ,H_μ} :

$$J_{H_\lambda,H_\mu} = Q_\lambda Q_\mu Q^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)},\ \lambda,\mu = 0,...,h-1. \tag{4}$$

Il impose à ces éléments de satisfaire les h^3 conditions :

$$Q_\nu J_{H_\lambda,H_\mu} = J_{H_\lambda,H_\mu} Q_\nu,\ \lambda,\mu,\nu = 0,...,h-1. \tag{5}$$

Les générateurs Q_i et les relations (5) définissent un groupe infini que Schur note $\mathfrak{K}'$. Les éléments de ce groupe sont les mots formés à partir des Q_i et des Q_i^{-1}, le mot vide étant noté E. Tout élément peut être mis sous la forme $Q_1^{\alpha_1}Q_2^{\alpha_2}...Q_1^{\beta_1}Q_2^{\beta_2}...$, où les α_i, β_i, etc. sont des entiers. Des règles de simplification de ces expressions existent. Tout d'abord, pour tout mot M, $EM = ME = M$. Ensuite, Q_i^{-1} vérifie $Q_iQ_i^{-1} = Q_i^{-1}Q_i = E$. En outre, le groupe $\mathfrak{K}'$ est défini à l'aide des relations (5) dont il faut tenir compte pour la simplification des expressions $Q_1^{\alpha_1}Q_2^{\alpha_2}...Q_1^{\beta_1}Q_2^{\beta_2}....$

Les J_{H_λ,H_μ} engendrent un groupe que Schur note $\mathfrak{N}'$, qui est un sous-groupe central[24] de $\mathfrak{K}'$. Il s'agit d'un groupe abélien et infini. Les relations

[24] Les relations (5) disent que les J_{H_λ,H_μ} commutent avec les Q_ν et on en déduit aisément qu'ils commutent également avec les Q_ν^{-1} et donc avec tout élément de la forme d'un produit fini $Q_1^{\alpha_1}Q_2^{\alpha_2}...Q_1^{\beta_1}Q_2^{\beta_2}....$

(5) et l'associativité de la loi de composition de $\mathfrak{H}$ impliquent que les J_{H_λ,H_μ} vérifient les relations

$$(B.) \qquad J_{P,Q}J_{PQ,R} = J_{P,QR}J_{Q,R}, \;\; P, Q, R \in \mathfrak{H}.$$

Schur affirme que tout élément de $\mathfrak{K}'$ peut se mettre sous la forme JQ_λ, où J appartient à $\mathfrak{N}'$[25]. Cette écriture est unique, au sens où si $JQ_\lambda = J'Q_\mu$, alors $\lambda = \mu$ et $J = J'$. Schur remarque également que les J_{H_λ,H_μ} ne peuvent satisfaire aucune relation de la forme $\prod_{\lambda,\mu} J_{H_\lambda,H_\mu}^{l_{\lambda,\mu}} = E$ qui ne découle de $(B.)$. Ainsi $\mathfrak{N}'$ peut être défini comme le groupe abélien engendré par les générateurs J_{H_λ,H_μ}, muni des relations $(B.)$.

$\mathfrak{N}'$ est un groupe abélien de génération finie. La structure de tels groupes est connue de Schur[26]. Il décide ici de renommer les h^2 générateurs J_{H_λ,H_μ} en X_1, X_2, ..., X_p, où $p = h^2$ (ce qui revient juste à se donner un ordre sur les J_{H_λ,H_μ}). Les relations $(B.)$ prennent alors la forme

$$(6) \qquad X_1^{\alpha_{\lambda 1}}X_2^{\alpha_{\lambda 2}}...X_p^{\alpha_{\lambda p}} = E, \;\; \lambda = 1, ..., h^3,$$

où les $\alpha_{\lambda\mu}$ prennent les valeurs -1, 1 ou 0. Si $p - s$ est le rang du système d'équations (6) et si e_1, e_2, ..., e_ρ sont les diviseurs élémentaires[27] strictement plus grands que 1 du système $(\alpha_{\lambda,\mu})$, alors $\mathfrak{N}'$ est isomorphe à un produit $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}''$, où $\mathfrak{N}$ est un groupe fini, produit de groupes cycliques d'ordres respectifs e_1, e_2, ..., e_ρ, et où $\mathfrak{N}''$ est un groupe libre de rang s. En termes modernes,

$$\mathfrak{N}' \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(e_1)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_2)} \times ... \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_\rho)} \times \mathbb{Z}^s.$$

Schur sait donc qu'il existe dans $\mathfrak{N}'$ $\rho + s$ éléments

$$Y_\alpha = X_1^{s_{\alpha 1}}...X_p^{s_{\alpha p}}, \;\; \alpha = 1, ..., \rho,$$

[25]Schur ne donne pas de justification de ce fait. Il suffit essentiellement de se convaincre que les Q_ν^{-1} se mettent sous la forme JQ_λ ; il est ensuite assez aisé de montrer par récurrence sur le nombre de termes d'une expression $Q_{j_1}^{a_1}Q_{j_2}^{a_2}...Q_{j_n}^{a_n}$, où les a_i prennent la valeur 1 ou -1, que tout élément de $\mathfrak{K}'$ se met sous la forme JQ_λ.

Comme $H_0H_0 = H_0 = E$, $\varphi(0,0) = 0$, donc $Q_0Q_0 = J_{H_0,H_0}Q_0$, d'où $Q_0^{-1} = J_{H_0,H_0}^{-1}$.

Soient maintenant λ quelconque, μ tel que $H_\mu = H_\lambda^{-1}$. Comme $H_\lambda H_\mu = H_0$, $\varphi(\lambda,\mu) = 0$. De $J_{H_\lambda,H_\mu} = Q_\lambda Q_\mu Q_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1}$ on déduit $Q_\lambda^{-1}J_{H_\lambda,H_\mu} = Q_\mu Q_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1} = Q_\mu Q_0^{-1} = Q_\mu J_{H_0,H_0}^{-1}$. Et on a donc prouvé : $Q_\lambda^{-1} = JQ_\mu$ où J appartient à $\mathfrak{N}'$.

[26]On a déjà mentionné au chapitre précédent le théorème de structure des groupes abéliens de génération finie, prouvé dans [96].

[27]Nous reviendrons en détail sur les diviseurs élémentaires lorsque nous aborderons la naissance des groupes d'homologie. L'idée ici est que l'on peut former la matrice des coefficients $(\alpha_{\lambda\mu})_{\lambda=1,...,h^3,\mu=1,...,p}$. On appelle $p - s$ le rang de cette matrice et e_1, e_2, ..., e_ρ ses diviseurs élémentaires strictement plus grands que 1.

$$Z_\beta = X_1^{t_{\beta 1}} ... X_p^{t_{\beta p}}, \ \beta = 1, ..., s,$$

qui engendrent tous les éléments de $\mathfrak{N}'$ et tels que les Y_α sont d'ordre e_α tandis qu'aucune relation non triviale entre les Z_β n'est vérifiée.

Les éléments X_ν sont bien entendu engendrés par les Y_α et les Z_β ; ils s'écrivent donc sous la forme

$$X_\nu = Y_1^{a_{\nu 1}} ... Y_\rho^{a_{\nu \rho}} Z_1^{b_{\nu 1}} ... Z_s^{b_{\nu s}}.$$

Schur décide de regarder ce qu'il advient si l'on spécialise les indéterminées X_1, ..., X_p en des nombres. Si l'on considère donc p nombres complexes x_1, ..., x_p vérifiant les relations

$$x_1^{\alpha_{\lambda 1}} x_2^{\alpha_{\lambda 2}} ... x_p^{\alpha_{\lambda p}} = 1, \ \lambda = 1, ..., h^3, \tag{7}$$

et si l'on pose

$$y_\alpha = x_1^{s_{\alpha 1}} ... x_p^{s_{\alpha p}}, \ \alpha = 1, ..., \rho,$$

$$z_\beta = x_1^{t_{\beta 1}} ... x_p^{t_{\beta p}}, \ \beta = 1, ..., s,$$

alors

$$x_\nu = y_1^{a_{\nu 1}} ... y_\rho^{a_{\nu \rho}} z_1^{b_{\nu 1}} ... z_s^{b_{\nu s}},$$

et $y_\alpha^{e_\alpha} = 1$, $\alpha = 1, ..., \rho$. Et réciproquement, si l'on prend pour les y_α des racines quelconques e_α-ièmes de l'unité et pour z_β des nombres complexes quelconques non nuls, alors les nombres x_ν, $\nu = 1, ..., p$, définis par $x_\nu = y_1^{a_{\nu 1}} ... y_\rho^{a_{\nu \rho}} z_1^{b_{\nu 1}} ... z_s^{b_{\nu s}}$, vérifient les relations (7).

Schur décide alors de soumettre les X_ν, $\nu = 1, ..., p$, à des relations supplémentaires, en l'occurrence :

$$X_1^{t_{\beta 1}} ... X_p^{t_{\beta p}} = E, \ \beta = 1, ..., s, \tag{8}$$

ce qui revient à poser $Z_\beta = E$. Il affirme que le groupe engendré par les Q_i et les relations (5) et (8) est un groupe fini, qu'il note $\mathfrak{K}$, et dans lequel les J_{H_λ, H_μ} (i.e. les X_ν) engendrent un groupe abélien d'ordre $\overline{m} = e_1 e_2 ... e_\rho$, isomorphe à $\mathfrak{N}$. Il prétend aussi que $\mathfrak{K}$ peut être vu comme une extension de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{N}$.

Arrêtons-nous pour l'instant et revenons sur la construction que Schur vient d'effectuer. Schur cherche une extension centrale $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}$. Si $\mathfrak{A}$ désigne le groupe abélien par lequel se fait l'extension, alors il existe des éléments $A_{\lambda,\mu}$ dans $\mathfrak{A}$ tels que

$$G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)}, \ \lambda, \mu = 0, 1, ..., h-1, \tag{3}$$

si l'on a dans $\mathfrak{H}$

$$(2) \qquad H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)}, \ \lambda, \mu = 0, 1, ..., h-1,$$

et si les H_λ correspondent de manière biunivoque aux classes $\mathfrak{A}G_\lambda$ de $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$.

Les générateurs Q_λ introduits par Schur correspondent aux G_λ. Les quantités J_{H_λ,H_μ} correspondent aux $A_{\lambda,\mu}$; leur définition via (4) est bien évidemment calquée sur les relations (3). Comme $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe central de $\mathfrak{G}$, il est naturel de demander que les éléments du groupe $\mathfrak{N}'$ engendré par les J_{H_λ,H_μ} commutent avec ceux du groupe $\mathfrak{K}'$ engendré par les Q_λ, exigence traduite par les relations (5).

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, Schur ne parle d'extension (centrale) d'un groupe par un autre que dans le cadre des groupes finis. Il ne précise donc pas que $\mathfrak{K}'$ est une extension centrale de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{N}'$ mais c'est pourtant le cas, dès lors que l'on généralise la notion d'extension aux groupes quelconques. Remarquer comme le fait Schur que tout élément de $\mathfrak{G}$ se met sous la forme JQ_λ, et qu'une telle écriture est unique, revient d'ailleurs à exprimer que le quotient $\dfrac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}'}$ est isomorphe à $\mathfrak{H}$. Ainsi, pour le lecteur moderne, la construction de Schur peut être transcrite sous la forme d'une suite exacte

$$(S1) \qquad 1 \to \mathfrak{N}' \xrightarrow{i} \mathfrak{K}' \xrightarrow{\pi} \mathfrak{H} \to 1,$$

où i est l'inclusion de $\mathfrak{N}'$ dans $\mathfrak{K}'$ et π le morphisme défini sur les générateurs de $\mathfrak{K}'$ par $\pi(Q_\lambda) = H_\lambda$.

Juste après avoir défini $\mathfrak{K}'$ et $\mathfrak{N}'$, Schur remarque que les J_{H_λ,H_μ} sont essentiellement caractérisés par $(B.)$ (il précise qu'aucune relation non triviale ne peut être vérifiée par les J_{H_λ,H_μ} si elle ne découle de $(B.)$). Or $(B.)$ et $(A.)$ sont similaires et si l'on attribue des valeurs numériques r_{H_λ,H_μ} aux J_{H_λ,H_μ}, on obtient un système de nombres (r_{H_λ,H_μ}) vérifiant $(A.)$, c'est-à-dire un représentant d'une classe du multiplicateur de Schur $\mathfrak{M}$. Or lorsque Schur a expliqué comment peuvent être relevées des représentations projectives de $\mathfrak{H}$ en représentations ordinaires de $\mathfrak{G}$, il est apparu que pour obtenir un groupe $\mathfrak{G}$ suffisamment étendu, il faut que parmi les systèmes $(\psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}))$ obtenus à partir des caractères $\psi^{(\alpha)}$ de $\mathfrak{A}$ se trouve au moins un représentant de chaque classe de systèmes de $\mathfrak{M}$. Le groupe $\mathfrak{N}'$ se présente donc, à condition de quelques modifications, comme candidat pour le groupe $\mathfrak{A}$ par lequel faire l'extension de $\mathfrak{H}$ afin d'obtenir un groupe suffisamment étendu.

$\mathfrak{N}'$ est abélien mais infini. Schur supprime donc la partie libre en posant $Z_\beta = E$, $\beta = 1, ..., s$ (relations (8)). Cela revient à ne garder que le groupe

$\mathfrak{N}$ dont les éléments sont les $Y_\alpha = X_1^{s_{\alpha 1}} ... X_p^{s_{\alpha p}}$, $\alpha = 1, ..., \rho$. Le groupe $\mathfrak{K}$ défini via les générateurs Q_λ et les relations (5) et (8) peut être vu selon Schur comme une extension centrale de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{N}$. On peut exprimer ceci à l'aide de suites exactes. Soit $\mathfrak{N}''$ le sous-groupe de $\mathfrak{N}'$ engendré par les Z_β, $\beta = 1, ..., s$; $\mathfrak{N}$ peut être vu comme le quotient $\dfrac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}''}$. De plus $\mathfrak{N}''$ est un sous-groupe (distingué car central) de $\mathfrak{K}'$ et on peut considérer le quotient $\dfrac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}''}$. L'application i apparaissant dans la suite exacte $(S1)$ peut passer au quotient, au sens où si π_1 et π_2 désignent les projections canoniques $\pi_1 : \mathfrak{N}' \to \dfrac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}''}$ et $\pi_2 : \mathfrak{K}' \to \dfrac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}''}$, il existe un morphisme $\bar{i}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$(D3)$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{N}' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{K}' \arrow[d, "\pi_2"] \\ \dfrac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}''} \arrow[r, "\bar{i}"'] & \dfrac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}''}. \end{tikzcd}$$

π passant également au quotient[28], on a le diagramme commutatif :

$(D4)$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{K}' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_2"'] & \mathfrak{H} \arrow[d, "id"] \\ \dfrac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}''} \arrow[r, "\bar{\pi}"'] & \mathfrak{H}. \end{tikzcd}$$

A l'aide de ces diagrammes commutatifs et de $(S1)$, on peut dériver une nouvelle suite exacte :

$(S2)$

$$1 \longrightarrow \frac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}''} \xrightarrow{\bar{i}} \frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}''} \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathfrak{H} \longrightarrow 1.$$

Cette suite s'obtient en écrivant le diagramme commutatif suivant[29], fai-

[28] On a $\pi(\mathfrak{N}'') = 1$ car $\mathfrak{N}'' \subset \mathfrak{N}'$ et $\pi(\mathfrak{N}') = 1$ (comme $\mathfrak{N}'$ est également inclus dans $\mathfrak{K}'$, on se permet d'écrire $\mathfrak{N}'$ à la place de $i(\mathfrak{N}')$; de même on écrit $\mathfrak{N}''$ pour $i(\mathfrak{N}'')$).

[29] Dire que $(S2)$ est exacte revient essentiellement à dire que $\bar{\pi} \circ \bar{i} = 1$ (par le morphisme 1, on entend le morphisme envoyant tous les éléments sur le neutre 1). Comme π_1 est surjective, si $\bar{\pi} \circ \bar{i} \circ \pi_1 = 1$ alors $\bar{\pi} \circ \bar{i} = 1$. Or comme $(D3)$ est commutatif, $\bar{i} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ i$. Ainsi, $\bar{\pi} \circ \bar{i} \circ \pi_1 = \bar{\pi} \circ \pi_2 \circ i$. Mais comme $(D4)$ est commutatif, $\bar{\pi} \circ \pi_2 = id \circ \pi = \pi$. On obtient finalement $\bar{\pi} \circ \bar{i} \circ \pi_1 = \pi \circ i = 1$ car $(S1)$ est exacte.

sant apparaître $(S1)$, $(D3)$ et $(D4)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathfrak{N}' & \xrightarrow{i} & \mathfrak{K}' & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{H} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
1 & \longrightarrow & \dfrac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}''} & \xrightarrow{\bar{i}} & \dfrac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}''} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathfrak{H} & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

On a pu noter précédemment que rajouter les conditions (8) revenait à faire le quotient par $\mathfrak{N}''$. Ainsi on peut voir $\mathfrak{N}$ comme le quotient $\dfrac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}''}$ et $\mathfrak{K}$ comme le quotient $\dfrac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{N}''}$. Il apparaît alors, via $(S2)$, que $\mathfrak{K}$ est une extension de $\mathfrak{H}$ par le groupe abélien $\mathfrak{N}$, ce qui rejoint ce qu'affirme Schur.

Reprenons le fil des pensées de Schur. Il a remarqué précédemment que si l'on prend pour les y_α des racines quelconques e_α-ièmes de l'unité et pour z_β des nombres complexes quelconques non nuls, alors les nombres x_ν, $\nu = 1, ..., p$, définis par $x_\nu = y_1^{a_{\nu 1}}...y_\rho^{a_{\nu\rho}} z_1^{b_{\nu 1}}...z_s^{b_{\nu s}}$, vérifient les relations (7). Pour un tel choix des y_α et des z_β, $(x_\nu)_{\nu=1,...,h^2}$ est donc un système de nombres satisfaisant $(A.)$, c'est-à-dire un système de facteurs. Souvenons-nous aussi qu'au cours du premier paragraphe il a montré que le multiplicateur de Schur était fini, en donnant l'argument selon lequel toute classe de $\mathfrak{M}$ admet un représentant dont tous les nombres $s_{P,Q}$ sont des racines h-ièmes de l'unité.

Schur a renommé les J_{H_λ, H_μ}, λ, $\mu = 0, ..., h-1$ en X_1,...,X_p, $p = h^2$. Disons que $J_{P,Q}$ soit égal à X_ν. Si l'on attribue à $J_{P,Q}$ le nombre $r_{P,Q}$, le nombre x_ν associé à X_ν vérifie, bien entendu, $x_\nu = r_{P,Q}$. Les y_α et z_β définis comme suit

$$y_\alpha = x_1^{s_{\alpha 1}}...x_p^{s_{\alpha p}},\ \alpha = 1, ..., \rho; \quad z_\beta = x_1^{t_{\beta 1}}...x_p^{t_{\beta p}},\ \beta = 1, ..., s,$$

sont alors des fonctions des $r_{P,Q}$. Schur note ces fonctions f_α et g_β, de sorte qu'on a :

$$y_\alpha = f_\alpha(r_{R,S}), \quad z_\beta = g_\beta(r_{R,S}).$$

De plus, comme on l'a vu auparavant,

$$r_{P,Q} = x_\nu = y_1^{a_{\nu 1}}...y_\rho^{a_{\nu\rho}} z_1^{b_{\nu 1}}...z_s^{b_{\nu s}}.$$

Schur introduit donc les fonctions $F_{P,Q}$ et $G_{P,Q}$ telles que

$$y_1^{a_{\nu 1}}...y_\rho^{a_{\nu\rho}} = F_{P,Q}(y_\alpha), \quad z_1^{b_{\nu 1}}...z_s^{b_{\nu s}} = G_{P,Q}(z_\beta),$$

ce qui lui permet d'écrire les $r_{P,Q}$ sous la forme :

$$r_{P,Q} = F_{P,Q}(y_\alpha)G_{P,Q}(z_\beta).$$

Après avoir montré que $s = h$ – c'est-à-dire que la partie libre de $\mathfrak{N}'$ a pour rang l'ordre de $\mathfrak{H}$ – Schur prouve que si l'on choisit les $r_{R,S}$ sous la forme $\dfrac{c_R c_S}{c_{RS}}$ alors les $f_\alpha(r_{R,S})$, $\alpha = 1, ..., \rho$ sont identiquement égaux à 1, i. e. valent 1 pour tout choix des c_P. Il prouve ensuite que pour un choix quelconque des z_1,...,z_h, il existe des quantités a_{H_0},...,$a_{H_{h-1}}$ telles que $z_\beta = g_\beta\left(\dfrac{a_R a_S}{a_{RS}}\right)$, $\beta = 1, ..., h$. Ceci lui permet de prouver que deux systèmes de facteurs $(r_{P,Q})$ et $(r'_{P,Q})$, qui s'écrivent donc sous la forme $r_{P,Q} = F_{P,Q}(y_\alpha)G_{P,Q}(z_\beta)$ et $r'_{P,Q} = F_{P,Q}(y'_\alpha)G_{P,Q}(z'_\beta)$, sont associés si et seulement si $y_\alpha = y'_\alpha$ pour tout α de $\{1, ..., \rho\}$.

Avec ceci, Schur affirme avoir prouvé que $\mathfrak{M}$ est isomorphe à $\mathfrak{N}$ car il note que tout système de facteurs est associé à l'un des $\overline{m} = e_1...e_\rho$ systèmes $r_{P,Q} = F_{P,Q}(y_\alpha)$ obtenus en faisant décrire à chaque y_α les racines e_α-ièmes de l'unité.

Nous allons clarifier cette isomorphie entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. Lorsque, partant du groupe $\mathfrak{N}'$, Schur affecte des valeurs numériques x_ν aux X_ν, de telle sorte qu'aux Y_α et Z_β correspondent les $y_\alpha = x_1^{s_{\alpha 1}}...x_p^{s_{\alpha p}}$ et les $z_\beta = x_1^{t_{\beta 1}}...x_p^{t_{\beta p}}$, il ne fait finalement rien d'autre que se donner un morphisme de $\mathfrak{N}'$ dans $(\mathbb{C}^\times)$. Notons $(\mathfrak{N}')^*$ l'ensemble des morphismes de $\mathfrak{N}'$ dans $\mathbb{C}^\times$. Introduisons l'application f définie comme suit :

$$\begin{array}{llll} f: & (\mathfrak{N}')^* & \longrightarrow & (\mathbb{C}^\times)^p \\ & \varphi & \longmapsto & (\varphi(X_1), ..., \varphi(X_p)). \end{array}$$

Attribuer aux X_ν des valeurs x_ν comme le fait Schur revient à se donner un élément φ de $(\mathfrak{N}')^*$ et à considérer $f(\varphi) = (\varphi(X_1), ..., \varphi(X_p)) = (x_1, ..., x_p)$. Notons que $(\mathfrak{N}')^*$ est muni d'une structure de groupe pour la multiplication et que f est un morphisme de groupes injectif. En outre $Im(f)$ est exactement l'ensemble des systèmes de nombres vérifiant $(A.)$. L'application f est donc un isomorphisme entre $(\mathfrak{N}')^*$ et l'ensemble des systèmes de facteurs.

Le sous-groupe $\mathfrak{L}$ de $(\mathfrak{N}')^*$ formé des éléments φ dont la restriction à $\mathfrak{N}''$ est 1 (ou encore tels que $\varphi(Z_\beta) = 1$, $\beta = 1, ..., h$) est isomorphe à $\mathfrak{N}^* = \{$morphismes de groupes de $\mathfrak{N}$ dans $\mathbb{C}^\times\}$. Or $\mathfrak{N}^*$ n'est rien d'autre que le groupe des caractères du groupe abélien $\mathfrak{N}$ donc $\mathfrak{N}^*$ est isomorphe à $\mathfrak{N}$ et il s'ensuit que $\mathfrak{L}$ est isomorphe à $\mathfrak{N}$.

Maintenant f induit un isomorphisme de $\mathfrak{L}$ sur $f(\mathfrak{L})$. Il reste à voir que $f(\mathfrak{L})$ est isomorphe à $\mathfrak{M}$. Tout système de facteurs est obtenu comme image par f d'un élément de $(\mathfrak{N}')^*$. Soit donc φ un élément quelconque de $(\mathfrak{N}')^*$. Si l'on note $\tilde{\varphi}$ l'élément de $\mathfrak{L}$ coïncidant avec φ sur $\mathfrak{N}$, $f(\tilde{\varphi})$ est associé à $f(\varphi)$ car, comme l'a prouvé Schur, deux systèmes de nombres $(r_{P,Q})$ et $(r'_{P,Q})$ vérifiant $(A.)$ sont associés si et seulement si $y_\alpha = y'_\alpha$ pour tout α de $\{1, ..., \rho\}$. Ainsi tout élément de $\mathfrak{M}$ admet un représentant sous la forme $f(\tilde{\varphi})$. En outre, deux éléments distincts $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ de $\mathfrak{L}$ s'envoient par f sur deux systèmes non associés, car il existe au moins un Y_α tel que $\tilde{\varphi}(Y_\alpha) \neq \tilde{\psi}(Y_\alpha)$. On voit ainsi qu'on a une correspondance biunivoque entre $f(\mathfrak{L})$ et $\mathfrak{M}$, dont il est aisé de vérifier qu'elle est un morphisme de groupes. Finalement $f(\mathfrak{L})$ est bien isomorphe à $\mathfrak{M}$, et par conséquent $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$ sont isomorphes.

Les groupes $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{K}$ construits par Schur ont donc pour cardinaux respectifs $\overline{m} = m$ et mh. Chaque caractère ψ de $\mathfrak{N}$ fournit un système de facteurs $(\psi(J_{P,Q}) = \psi(X_\nu))$ et deux systèmes correspondant à un caractère différent de $\mathfrak{N}$ sont non associés, donc $m' = m$. Ainsi le groupe $\mathfrak{K}$ obtenu comme extension centrale de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{N}$ est un groupe suffisamment étendu, et c'est même un groupe de représentation car il est de cardinal minimum possible.

En conclusion de son troisième paragraphe, Schur donne quelques informations qu'il a pu obtenir sur les groupes de représentation eux-mêmes. Il explique qu'il n'y a pas unicité[30] (même à isomorphisme près) de tels groupes car dans la construction de $\mathfrak{K}$ est fait un choix de générateurs Z_1,...,Z_h de la partie libre de $\mathfrak{N}'$. Il montre par contre qu'il y a unicité à isomorphisme près du groupe dérivé des groupes de représentation d'un groupe fini donné $\mathfrak{H}$.

Le paragraphe 4 de l'article [204] s'attarde sur le problème, étant donnée une extension centrale $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{A}$, de la détermination des représentations irréductibles de $\mathfrak{G}$ correspondant à un caractère de $\mathfrak{A}$. Le cinquième et dernier paragraphe propose quant à lui quelques propositions aidant, dans certains cas particuliers, à la détermination du multiplicateur de Schur et des groupes de représentation d'un groupe fini donné. Nous n'en dirons pas plus sur ces deux paragraphes car, étant surtout importants pour la théorie des représentations en soi, ils ne présentent pas de réel intérêt dans le cadre de notre étude.

En conclusion de ce chapitre, dressons un bilan des aspects les plus essentiels de l'article de Schur que nous venons en partie d'analyser. Tout d'abord, le problème principal motivant Schur dans [204] est remarquable. En recherchant un groupe permettant de relever toutes les représentations projectives

[30]Cette non-unicité rejoint d'ailleurs le fait – non étudié au moment de l'article de Schur – qu'il peut y avoir plusieurs extensions non isomorphes d'un groupe par un autre.

d'un groupe donné, Schur se pose une question qui connaît de nombreux analogues dans l'algèbre moderne. Son problème souffre du défaut de ne pas être "universel" au sens où on l'entend aujourd'hui[31] mais il est néanmoins proche de cette notion d'universalité qui est aujourd'hui un moyen de définir de nombreux objets algébriques[32], car il cherche un objet – le groupe de représentation – vérifiant une propriété relative à tous les objets d'une même classe – les représentations projectives de $\mathfrak{H}$.

Nous ne pouvons également qu'être frappés par le caractère novateur du raisonnement que Schur met en place dans le troisième paragraphe de [204]. L'abstraction et la généralité avec lesquelles est menée sa construction ont peu à envier aux raisonnements apparaissant à partir des années 1920 avec l'essor de l'algèbre moderne et qui s'imposeront peu à peu comme le style de l'algèbre, jusqu'à aujourd'hui. L'idée notamment de raisonner à l'aide de générateurs et relations – on a d'ailleurs pu observer comment Schur a judicieusement introduit les relations codant celles apparaissant nécessairement dans un groupe de représentation – s'avère dans cet article très pertinente car il obtient, au-delà de l'existence des groupes de représentation, un procédé de construction de tels groupes, procédé qui fournit en outre tous les groupes de représentation (et rend manifeste, ce qui n'était a priori pas évident, qu'il n'y a pas forcément unicité du groupe de représentation d'un groupe donné). Nous aurons d'ailleurs, au cours de ce mémoire, l'opportunité d'observer d'autres constructions, tout aussi abstraites et générales que celle de Schur, faisant intervenir la présentation des groupes par générateurs et relations[33]. Nous pourrons également constater que ce procédé imaginé

[31] La solution du problème de Schur, i.e. le groupe de représentation n'est pas unique à isomorphisme près.

[32] L'idée de définir un objet en tant que solution d'un problème universel est de le caractériser via sa propriété vis-à-vis d'une classe d'autres objets. Par exemple, si K est un anneau commutatif et A et B deux K-modules, on peut définir le produit tensoriel $A \otimes B$ comme solution du problème universel suivant :

il existe un K-module $A \otimes B$ et une application K-bilinéaire $\varphi : A \times B \to A \otimes B$ tels que pour tout K-module C et toute application bilinéaire $f : A \times B \to C$, il existe une unique application linéaire g telle que $f = g \circ \varphi$ (on dit que f se factorise à droite par φ).

Cette définition se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & A \otimes B \arrow[d, dotted, "g"] \\ A \times B \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & C. \end{tikzcd}$$

[33] Comme par exemple celle intervenant en lien avec le deuxième groupe d'homologie dans l'article [121] de Heinz Hopf.

par Schur sera repris – mais pour autant semble-t-il sans avoir connaissance du travail de Schur analysé ici – et utilisé de manière systématique dans les futures études des extensions de groupes.

De manière plus terre à terre, on a pu relever dans [204] l'apparition de concepts importants dans l'émergence de la cohomologie des groupes. Nous y voyons notamment l'occurrence (a priori la première) de systèmes de facteurs. Nous aurons l'occasion de revenir à maintes reprises sur ces objets au cours de notre étude car ils sont indissociables de l'émergence de la cohomologie des groupes. Ils apparaîtront notamment plus tard dans les travaux de Brauer sur les représentations et les algèbres. Ils apparaissent également naturellement, comme c'est en fin de compte le cas dans cet article de Schur, lorsqu'on s'intéresse aux extensions de groupes[34]. Nous soulevons ainsi en même temps un autre point important de [204], qui est l'introduction de l'idée d'extension d'un groupe par un autre. Schur pose ici un problème général d'existence – à savoir, étant donnés un groupe fini $\mathfrak{H}$ et un groupe fini abélien $\mathfrak{A}$, trouver un groupe $\mathfrak{G}$ contenant $\mathfrak{A}$ et tel que $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} \simeq \mathfrak{H}$ – problème pour lequel il n'y a d'ailleurs en général pas unicité de la solution.

Enfin, le groupe des classes d'équivalence (pour la relation d'association) de systèmes de facteurs introduit par Schur est à lui seul un objet qui justifie notre intérêt pour [204]. Le fait que l'appellation "multiplicateur de Schur" lui ait été attribué permet déjà au lecteur de se convaincre de son importance. Nous établirons plus tard son lien direct avec la cohomologie des groupes, lorsque nous expliquerons que le multiplicateur de Schur d'un groupe fini $\mathfrak{H}$ n'est rien d'autre que son deuxième groupe de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{C}^{\times}$.

[34]Nous consacrerons un chapitre aux extensions de groupes, et notamment à leur codification par Schreier dans [199]. Voici ce qu'il faut comprendre lorsqu'on affirme que les systèmes de facteurs apparaissent naturellement dans les extensions de groupes. Soit G une extension d'un groupe H par un groupe A, c'est-à-dire telle qu'on ait une suite exacte :

$$1 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1.$$

Si l'on fixe pour chaque h de H un antécédent $s(h)$ dans G tel que $p \circ s(h) = h$, alors $s(h)s(h^{'})s(hh^{'})^{-1}$ est dans le noyau de p, donc dans l'image de i. Si l'on identifie A et $i(A)$, il existe donc pour tous éléments h, $h^{'}$ de H un élément $a(h,h^{'})$ de A tel que $s(h)s(h^{'}) = a(h,h^{'})s(hh^{'})$. En considérant $s(hh^{'}h^{''})$ et en utilisant l'associativité de H, il est aisé de montrer que les $a(h,h^{'})$ vérifient une relation analogue à $(A.)$. Un ensemble $\{a(h,h^{'}), h, h^{'} \in \mathfrak{H}\}$ est appelé système de facteurs associé à l'extension.

Chapitre 3

Représentations de groupes et algèbres associatives

De nombreux résultats de la théorie algébrique des groupes et des représentations de groupes ont été reformulés a posteriori à l'aide du langage cohomologique. L'exemple le plus connu, et probablement le plus ancien, est le théorème 90 de Hilbert, que l'on peut interpréter comme la trivialité d'un certain groupe de cohomologie en dimension 1.

Nous effectuons ici un survol des développements de différentes théories algébriques auxquelles les résultats de la cohomologie, une fois développée, se sont adaptés naturellement. Ce qui importe principalement pour notre propos est de repérer ces résultats de nature cohomologique qui ont été établis en algèbre dans le premier tiers du vingtième siècle et de montrer qu'ils sont significatifs dans le développement de certaines théories algébriques.

Le but est que le lecteur se fasse une idée de l'essor lié, dans les trois premières décennies du vingtième siècle, de théories algébriques variées et notamment de la manière dont les systèmes de facteurs y ont acquis une importance accrue, car les systèmes de facteurs sont des objets typiquement cohomologiques vu qu'ils vérifient une relation de 2-cocycle[1]. Si les systèmes

[1]Selon les notations de l'introduction, un 2-cocycle est, par définition, un élément de $Z^2(G, M)$. Un 2-cocycle f vérifie donc $d^2 f = 0$, ce qui se traduit par la relation :

$$g_1 f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) = f(g_1, g_2) + f(g_1 g_2, g_3).$$

Les systèmes de facteurs que nous verrons apparaître au cours de ce chapitre proviennent tous de la situation particulière où G est le groupe de Galois d'une extension galoisienne K/k et $M = K^\times$ muni de l'action de G. Comme on a l'habitude de noter la loi de composition interne de $K^\times$ sous forme multiplicative, la relation caractéristique des systèmes de facteurs apparaîtra en réalité sous la forme (on préfère alors noter l'action en exposant) :

$${}^{g_1} f(g_2, g_3) f(g_1, g_2 g_3) = f(g_1, g_2) f(g_1 g_2, g_3).$$

de facteurs sont les objets interprétables cohomologiquement apparaissant les plus fréquemment en algèbre au début du XXe siècle, ils ne sont bien entendu pas les seuls. Un autre exemple de résultat relevant de la cohomologie des groupes est le théorème de Speiser (que nous donnons en 3.2.2), étudiant le lien entre morphismes croisés et morphismes principaux.

3.1 Le développement de la théorie des algèbres jusqu'au début des années 1930

Le développement de la théorie des algèbres apparaît lié aux questionnements soulevés par l'arithmétique. Il est hors de propos de s'attarder en détail sur ce point, dont l'explicitation demanderait un travail en lui-même très important, et qui a reçu déjà plusieurs contributions auxquelles nous renvoyons. Günther Frei, dans [82], propose un survol de l'histoire des algèbres, en particulier des questions arithmétiques qui y sont liées. Il est pour l'essentiel repris dans [83] mais mis au cœur des relations entre recherches arithmétiques sur les algèbres et développement de la théorie algébrique des nombres. Le même sujet est traité par Charles W. Curtis ([45]) dans la perspective de la volonté, incarnée notamment par Noether, d'utiliser des méthodes non commutatives en théorie algébrique des nombres. Peter Roquette, dans [193], revient sur la genèse du théorème fondamental des algèbres sur les corps de nombres[2]. Ce théorème résulte des efforts conjugués de Brauer, Hasse et Noether, cf. [27]. Sur la part d'Adrian A. Albert dans la preuve de ce théorème, et ses rapports avec Helmut Hasse, on pourra consulter [80].

Dans cette section nous nous inspirons en grande partie de [83]. Nous ne prétendons rien ajouter d'original sur le sujet, notre objectif principal étant que le lecteur puisse appréhender comment s'est tissé le lien entre théorie des algèbres et théorie des représentations, et le rôle des systèmes de facteurs dans ce processus.

Dans [83], Frei explique que la volonté d'appliquer des méthodes non-commutatives à des théories a priori d'essence commutative, comme la théorie du corps de classes et la théorie algébrique des nombres, "eut comme conséquence la création par Emmy Noether et Hasse de méthodes cohomologiques en théorie du corps de classes et ouvrit la voie à la cohomologie des groupes"[3]. Cette affirmation suscite pour nous la question, qui se pose en fili-

---

[2] Un corps de nombres algébriques, ou simplement corps de nombres, est une extension finie (donc algébrique) de $\mathbb{Q}$.

[3] Cf. [83], p. 118 : "It was responsible for the creation of cohomological methods in class field theory by Emmy Noether and Hasse and paved the way for the cohomology of

grane dès ce chapitre, d'élucider si le développement des théories algébriques que nous abordons ici a conduit directement à la naissance de la cohomologie des groupes ou si, simplement, la cohomologie des groupes a pu y trouver, une fois créée, un terrain naturel où s'exprimer.

3.1.1 Structure des algèbres et algèbres à division

Le texte [234] de Wedderburn, déjà évoqué en 1.1, est fondamental dans la compréhension de la structure des algèbres. En utilisant le langage actuel, il établit :

1. toute algèbre[4] sur un corps quelconque admet une unique sous-algèbre nilpotente[5] maximale[6] (que l'on peut nommer "radical") ;
2. toute algèbre est somme de son radical et d'une algèbre semi-simple[7] ;
3. toute algèbre semi-simple est somme directe d'algèbres simples[8] ;
4. toute algèbre simple est le produit direct d'une algèbre à division et d'une algèbre totale de matrices[9].

Wedderburn offre ainsi une image précise de la structure des algèbres, d'autant plus que dans toutes les propositions précédentes, on a unicité de la décomposition (et unicité à isomorphisme près de l'algèbre à division déterminée par une algèbre simple). L'étude doit alors se concentrer sur les

groups".

[4]Précisons à nouveau que par "algèbre", il faut entendre "algèbre linéaire associative" (qui est, en particulier, de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur le corps de base).

[5]Wedderburn donne deux définitions équivalentes d'une algèbre nilpotente. Il commence par dire d'une algèbre A qu'elle est nilpotente s'il existe un entier naturel n tel que $A^n = 0$ ([234] p. 87) puis remarque qu'une algèbre est nilpotente si et seulement si tous ses éléments sont nilpotents ([234] p. 91).

[6]Cf. [234], Theorem 13, p. 89.

[7]C'est-à-dire n'admettant aucune sous-algèbre nilpotente.

[8]Cf. [234], Theorem 17, p. 94. Une algèbre dite simple est une algèbre n'admettant, en tant qu'anneau, aucun idéal bilatère non trivial.

[9]*Ibid.*, Theorem 22, p. 99. Cela revient à dire que toute algèbre simple est isomorphe à $M_k(D)$ pour une certaine algèbre à division D et un certain entier k. Wedderburn explique ce qu'il entend par produit direct aux pages 114-116. Une des manières de définir le produit $A \times B$ de deux algèbres A et B est de dire qu'il est engendré par l'ensemble des couples (x, y), où x est dans A et y dans B, soumis aux conditions $(x + x^{'}, y + y^{'}) = (x, y) + (x^{'}, y^{'}) + (x, y^{'}) + (x^{'}, y)$ et $(x, y)(x^{'}, y^{'}) = (xx^{'}, yy^{'})$. On trouve une description d'une algèbre comme un produit – sans que cette notion ne soit encore formalisée – dès 1878, dans un article de William K. Clifford (cf. [41] pp. 273-4), qui indique que cette manière de composer deux algèbres est due à Benjamin Peirce. Le produit direct d'algèbre est en fait ce que nous appelons "produit tensoriel", bien que l'action du corps de base ne soit pas prise en compte dans la définition qu'en donne Wedderburn et ses contemporains. Cette action est en effet présente implicitement dans leurs manipulations.

algèbres nilpotentes et les algèbres à division. Mais il se trouve qu'à l'époque de Wedderburn, très peu d'algèbres à division sont connues. Elle se limitent en effet essentiellement aux algèbres à division sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, celles sur $\mathbb{R}$ consistant en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ et l'unique algèbre à division sur $\mathbb{C}$ étant $\mathbb{C}$ lui-même. En particulier, il apparaît qu'une seule algèbre à division était recensée, qui ne soit pas un corps.

Cela dit, les membres de l'*American Mathematical Society* avaient, depuis peu, pu découvrir de nouvelles algèbres à division car en 1906, soit un an à peine avant la parution du travail de Wedderburn, Leonard Dickson avait présenté la construction d'un nouveau type d'algèbres à division lors d'une séance de l'AMS[10]. Dickson avait considéré des algèbres engendrées sur un corps K quelconque par les quantités $i^s j^k$, $0 \leq s, k \leq r-1$, où i est racine d'un polynôme irréductible de degré r de $K[X]$ dont toutes les racines s'expriment, à l'aide d'un polynôme θ de $K[X]$, sous la forme $\theta^l(i)$ pour $0 \leq l \leq r-1$, j est un élément vérifiant $ji = \theta(i)j$ et j^r est un élément g de K. Sous certaines conditions sur le polynôme annulateur de i et sur g, de telles algèbres peuvent bien être des algèbres à division. Dickson avait ainsi montré qu'il était possible d'obtenir des algèbres à division via cette construction pour $r = 2$ et $r = 3$. Wedderburn a ensuite montré, dans [235], que la condition pour obtenir une algèbre à division du type proposé par Dickson, pour un r quelconque, est qu'aucun des g^l, $1 \leq l < r$, ne soit la norme[11] d'un élément s'exprimant comme un polynôme en i à coefficients dans K.[12]

Grâce à ce critère, il est facile de voir que l'algèbre des quaternions généralisés considérée par Dickson dans [51][13] donne des exemples d'algèbres à division de degré 4 sur un corps quelconque K de caractéristique différente de 2. Cette algèbre est engendrée par les unités principales 1, α, β, $\alpha\beta$, où les éléments α et β vérifient $\alpha\beta = -\beta\alpha$ et ont pour carrés des éléments de K. Il suffit que β^2 ne soit la norme d'aucun élément de K pour obtenir une algèbre à division[14]. Dans son livre *Algebras and their Arithmetics* [53], Dickson construit également explicitement une algèbre de degré $3^2 = 9$ sur $\mathbb{Q}$.[15]

---

[10]Cf. le résumé qui en est fait au *Bulletin of the AMS* **12** (1906), pp. 441-442. Cf. aussi l'article [52] tiré, avec de nombreux ajouts, de l'exposé de Dickson.

[11]La norme (relativement à L/K) $N(t)$ d'un élément t d'une extension finie L/K de groupe de Galois G est la quantité $N(t) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(t)$.

[12]Donc, dit autrement, aucun des g^l ne doit être la norme d'un élément de $K[i] = K(i)$.

[13]L'appellation "quaternions généralisés" apparaît dans [52].

[14]L'algèbre $\mathbb{H}$ se retrouve facilement dans ces considérations en prenant $K = \mathbb{R}$ et $\alpha^2 = \beta^2 = -1$.

[15]Cf. [53] §48.

Les développements de la théorie des algèbres par l'école américaine furent quasi inconnus en Europe[16], et en particulier en Europe germanophone, jusqu'à la traduction en allemand, effectuée en 1927, du traité [53] de Dickson. Emmy Noether fut semble-t-il une des rares à s'intéresser aux travaux de Wedderburn et Dickson avant 1927.[17] Elle reprit les algèbres construites par Dickson en en modifiant la présentation et en identifiant l'idée sous-jacente propice à la construction d'algèbres d'un type plus général[18].

Les conditions imposées par Dickson sur le nombre i font que l'extension $k(i)$ de k est cyclique, c'est-à-dire de groupe de Galois cyclique. Plutôt que de raisonner avec des polynômes θ comme le fait Dickson, on peut aussi bien considérer directement un générateur S du groupe de Galois. On peut alors décrire les algèbres de Dickson par la donnée d'une extension cyclique Z d'un corps k, dont le groupe de Galois est engendré par un élément S, et les relations :

- $A = Z + uZ + ... + u^{n-1}Z$;
- $zu = uz^S$ pour tout z de Z ;[19]
- $u^n = a \in k^*$.

De telles algèbres sont dites cycliques. Rien n'empêche de généraliser le procédé à des extensions galoisiennes K/k non cycliques. On obtient ainsi des algèbres sous forme d'un "produit croisé"[20] :

- $A = u_{S_1}K + ... + u_{S_{n-1}}K$ (où les S_i sont les éléments de G) ;
- $zu_S = u_S z^S$ pour tout z de K ;
- $u_S u_T = u_{ST} a_{S,T}$ avec $a_{S,T} \in K^*$;
- $a_{ST,R} a_{S,T}^R = a_{S,TR} a_{T,R}$.

Comme on le voit, les quantités $a_{S,T}$ qui apparaissent dans la description de ce type d'algèbre vérifient les relations caractéristiques des systèmes de facteurs[21]. Cela vient de l'exigence d'associativité au sein de l'algèbre, précisément de la relation $(u_S u_T)u_R = u_S(u_T u_R)$.

---

[16] Cf. [83] p. 117.

[17] *Ibid.* On a trace de cet intérêt de Noether dès 1923, du fait d'un rapport pour le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* sur un article de Wedderburn.

[18] Cf. la présentation qu'elle en fait dans [174].

[19] La notation z^S, usuelle dans ce cadre et plus largement dans celui de la théorie algébrique des nombres, désigne simplement l'image de z sous l'action de l'élément S, soit $S(z)$ si l'on préfère. Pour plus de détails sur cette notation, voir la note 30 du même chapitre.

[20] En version originale, "verschränkte Produkt". Noether a présenté pour la première fois ces produits croisés dans son cours "Nichtkommutative Arithmetik" de 1929/30. Ce cours fut rédigé par un de ses élèves, Max Deuring, sous l'intitulé *Algebra der hyperkomplexen Größen* ; cf. [173].

[21] Cf. 3.2.2.

3.1.2 Algèbres et théorie algébrique des nombres

Lorsque parut en 1927, à l'initiative d'Andreas Speiser, la traduction allemande du traité [53] de Dickson, ce sont avec lui les théorèmes de structure des algèbres sur un corps quelconque établis par Wedderburn, le nouveau type d'algèbre introduit par Dickson et ses considérations sur l'arithmétique au sein des algèbres[22] que le public mathématique allemand put découvrir. Ceci ouvrit de nombreuses perspectives à des chercheurs comme Noether, Artin ou encore Hasse, pour la théorie des algèbres bien sûr mais également pour la théorie algébrique des nombres. Emmy Noether était déjà engagée dans une réflexion sur les algèbres et leur lien avec la théorie des représentations, qu'elle prolongea en mettant au point une théorie générale des anneaux non commutatifs[23]. Artin s'occupa lui des aspects arithmétiques tandis que Hasse développa une théorie locale des algèbres.[24]

En outre, selon un principe mis en avant à plusieurs reprises par Emmy Noether, notamment lors du Congrès International des Mathématiciens de Zürich (1932), consistant en l'application de méthodes non commutatives aux théories commutatives[25], Artin et Hasse virent la possibilité d'utiliser la théorie – non commutative – des algèbres pour l'étude de la théorie algébrique des nombres, d'essence commutative[26].

Précisément, il leur est apparu que les connaissances sur les algèbres pourraient servir à étendre la théorie du corps de classes[27]. Un résultat fondamental de 1920 de Teiji Takagi[28] établit que toute extension abélienne (c'est-à-dire de groupe de galois abélien) finie sur un corps de nombres algébriques k est

---

[22]C'est un sujet qui retint une attention particulière de la part de Dickson. Ses racines se trouvent dans les suppléments de Dedekind aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* que nous avons déjà évoqués en 1.1, où est développée l'arithmétique dans les corps de nombres – dont la tâche première est la compréhension des propriétés de divisibilité dans l'anneau des entiers du corps de nombres considéré, qui passe par l'étude des idéaux de cet anneau. Dedekind avait remarqué que les corps de nombres peuvent être vus comme des algèbres commutatives sur $\mathbb{Q}$; Adolf Hurwitz tenta de transposer les théories arithmétiques élaborées par Dedekind à des algèbres (qui ne soient plus nécessairement des corps) sur des corps de nombres algébriques et instaura une tradition de recherche des propriétés arithmétiques des algèbres dont Dickson devint une figure de proue. Le problème majeur posé par l'élaboration d'une théorie arithmétique dans les algèbres était celui d'une définition adéquate d'entier. Sur le développement de cette théorie jusqu'à Dickson, on pourra consulter [79].

[23]Cf. [172].

[24]Cf. [83], p. 127.

[25]Cet aspect est analysé dans un papier de Curtis [45] qui développe également certains des points que nous évoquons dans ce chapitre.

[26]Cf. [83] pp. 127-8.

[27]Cette théorie est nommée ainsi en référence au corps de classes introduit par Hilbert dans [110].

[28]Cf. [217].

un corps de classes sur k, et réciproquement. La théorie du corps de classes se ramène donc à l'étude des extensions abéliennes de corps de nombres. L'espoir d'Artin et Hasse était que les connaissances sur les algèbres serviraient à étendre la théorie du corps de classes à des extensions non abéliennes de corps de nombres.

La théorie du corps de classes est technique, et vu qu'elle ne concerne pas directement notre thèse, nous n'entrerons pas dans les détails de celle-ci. Le lecteur peut se contenter d'avoir à l'esprit le fait que les résultats de cette théorie furent reformulés à l'aide de la cohomologie des groupes. Le plus connu d'entre eux, dit "théorème 90 de Hilbert"[29] stipule que tout élement A de norme 1 d'une extension cyclique finie K/k, de groupe de Galois G engendré par l'élément S, s'écrit sous la forme[30] B^{1-S} pour un certain élément B de K. Clairement la réciproque de ce théorème est également vraie. En termes modernes, il exprime la trivialité du premier groupe de cohomologie de G à coefficients dans K^*.

La théorie des algèbres prit un tour nouveau à la fin des années 1920 grâce à la mise à disposition du public mathématique allemand des connaissances de l'école américaine, et du fait de la reconnaissance de ce qu'elle est intimement liée à la théorie des représentations, théorie très développée en Europe, en particulier en Allemagne. Nous indiquons donc de grands traits de l'édification de la théorie des représentations au début du XXe siècle, en soulignant quelques résultats d'essence cohomologique. Nous verrons le rôle crucial joué par les systèmes de facteurs dans le développement de la théorie des représentations et la reconnaissance de son lien étroit avec la théorie des algèbres.

3.2 La théorie des représentations jusqu'à Brauer

3.2.1 L'indice de Schur

Suite à son article [204] sur les représentations projectives, Schur fut vraisemblablement le seul durant plusieurs années à manipuler des systèmes de

[29]Nommé ainsi du fait de la numérotation adoptée par David Hilbert dans son rapport sur l'état de la théorie algébrique des nombres à la fin du XIXe siècle, le célèbre *Zahlbericht* [110].

[30]Hilbert emploie ce qu'il appelle les puissances symboliques, cf. [110], §54. Nous les verrons à nouveau dans ce chapitre. Il s'agit de notations consistant à réécrire l'expression $A^a(SA)^{a_1}(S^2A)^{a_2}...(S^{l-1}A)^{a_{l-1}}$ sous la forme $A^{a+a_1S+a_2S^2+...+a_{l-1}S^{l-1}}$. La quantité B^{1-S} désigne donc simplement le nombre $\dfrac{B}{S(B)}$.

facteurs. Mais une question de la théorie des représentations les fit resurgir en 1919.

Dès le tout début du vingtième siècle, Heinrich Mashke et William Burnside s'étaient posé la question du domaine de rationalité d'une représentation d'un groupe fini. Précisément, ils avaient cherché à déterminer si toute représentation dans $GL_n(\mathbb{C})$ était équivalente à une représentation par des matrices à coefficients dans un corps cyclotomique, i.e. engendré par une racine primitive de l'unité. Ils avaient répondu par l'affirmative à cette question dans certains cas[31].

Dans [206], Schur reformula ce problème dans le cadre plus large des corps de nombres algébriques, très en vogue à l'époque. Ce problème est présenté à l'aide d'une notion nouvelle, celle d'"indice", qui est demeurée dans le langage mathématique actuel sous la forme "indice de Schur".

Dire d'une représentation[32] (ou, comme le fait plutôt Schur, du groupe de matrices qu'elle détermine) qu'elle est K-rationnelle, où K est un corps de nombres, cela signifie qu'elle est équivalente à une représentation par des matrices à coefficients dans K. Schur indique que Frobenius a montré que toute représentation irréductible est rationnelle dans un corps de nombres, donc de la forme $\mathbb{Q}(\mu)$ avec μ algébrique, d'après le théorème de l'élément primitif. Toute représentation irréductible est donc rationnelle dans une extension finie de $\mathbb{Q}$ et Schur veut déterminer le degré minimal d'une telle extension.

Cherchant à caractériser les corps K dans lesquels une représentation est rationnelle, Schur remarque qu'ils doivent contenir tous les $\chi(R)$, où χ est le caractère irréductible associé à la représentation et R parcourt tous les éléments du groupe. Si k est un sous-corps donné de $\mathbb{C}$, le corps $k(\{\chi(R)\})$ est une extension intermédiaire entre k et K de degré sur k un nombre fini l. Si K est minimal, alors c'est une extension de degré fini n de k et l divise n. Le nombre $m = \dfrac{n}{l}$ est ce que Schur appelle l'indice du caractère irréductible vis-à-vis de k.[33]

Le problème posé par Schur dans [206] et auquel il commence à s'attaquer, à l'aide notamment d'une version du lemme de Schur dans un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$, est donc celui de la détermination de l'indice d'un caractère irréductible. C'est une question très difficile que Schur est loin d'avoir épuisée, et qui oppose toujours de nombreux obstacles. Mais en 1919 un éclairage intéressant fut donné à cette question pour certains corps.

---

[31] Cf. [44] III.4.

[32] Nous utilisons ici des définitions et des résultats déjà exposés en 1.3.

[33] Nous parlerons cependant plus souvent de l'indice d'une représentation irréductible plutôt que de l'indice du caractère irréductible qui lui est associé.

3.2.2 Une nouvelle occurrence des systèmes de facteurs

En 1919, le problème de l'indice de Schur motiva une contribution d'Andreas Speiser, un ancien étudiant de Hilbert à Göttingen. Celui-ci fit parvenir à la revue *Mathematische Zeitschrift* un article de quelques pages ([213]) établissant une condition suffisante pour que l'indice de Schur vaille 1. Mais plus que l'apport à la théorie de l'indice en elle-même, ce sont les résultats de Speiser relevant uniquement de la théorie des groupes qui ouvrirent de nouvelles perspectives.

Soit donnée une représentation irréductible d'un groupe fini, ou le groupe Γ de matrices qu'elle détermine, à coefficients dans une extension galoisienne K de $\mathbb{Q}$. Soit également k le corps engendré par les valeurs du caractère associé à cette représentation. L'observation principale de Speiser est que les représentations conjuguées obtenues par l'action du groupe de Galois $\mathfrak{G}$ de l'extension K/k sont toutes équivalentes[34]. Ainsi à tout élément S de $\mathfrak{G}$ correspond une matrice M_S telle que $M_S^{-1}\Gamma^S M_S = \Gamma$.[35] L'idée de Speiser est que, sous certaines conditions, on doit pouvoir déduire l'existence d'une représentation équivalente à celle de départ, qui serait invariante par l'action de $\mathfrak{G}$. Le groupe d'une telle représentation serait donc de la forme $M\Gamma M^{-1}$ et le candidat naturel (c'est un procédé assez classique) pour M serait la matrice $M = \sum_{S\in\mathfrak{G}} M_S$. La motivation de Speiser vient de ce qu'une représentation invariante selon $\mathfrak{G}$, d'après les résultats classiques de la théorie de Galois, est une représentation à coefficients dans k, donc d'indice de Schur égal à 1.

Mais Speiser ne présente pas ses réflexions ainsi, laissant l'application au problème de l'indice à la deuxième partie de son article. Il préfère commencer par introduire un nouveau type de représentation. Si $\mathfrak{G}$ est le groupe d'une extension galoisienne K/k, une représentation de $\mathfrak{G}$ au sens de Speiser consiste à associer à tous les éléments $E, A, B, ...$ de $\mathfrak{G}$ des matrices de $GL_n(K)$ vérifiant, pour tous S, T de $\mathfrak{G}$,

$$M_S^T M_T = M_{ST}.$$

La considération de cette loi de composition est, bien entendu, directement inspirée de la situation décrite plus haut. Si l'on a en effet $M_S^{-1}\Gamma^S M_S = \Gamma$, $M_T^{-1}\Gamma^T M_T = \Gamma$ et $M_{ST}^{-1}\Gamma^{ST} M_{ST} = \Gamma$,[36] alors $(M_S^T)^{-1}\Gamma^{ST} M_S^T = \Gamma^T$ d'où

[34] Car il s'agit de représentations de même degré et de même caractère, cf. la fin du chapitre 1.

[35] Si les matrices de Γ sont de la forme $A = (a_{ij})_{i,j}$, les matrices de Γ^S sont celles de la forme $(S(a_{ij})_{i,j})$

[36] La notation exponentielle peut être trompeuse pour un œil non averti. En effet étant donnée une matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$, la matrice A^{ST} est la matrice de coefficients $TS(a_{ij})$ et non $ST(a_{ij})$.

$M_T^{-1}(M_S^T)^{-1}\Gamma^{ST}M_S^TM_T = M_T^{-1}\Gamma^TM_T = \Gamma = M_{ST}^{-1}\Gamma^{ST}M_{ST}$, et il est donc naturel d'examiner la condition $M_S^TM_T = M_{ST}$. Cette condition est celle recherchée par Speiser, car elle implique que Γ est k-rationnel.

Speiser montre que de telles représentations existent. Il y en a même une infinité vu que pour toute matrice M inversible, $M_S = (M^S)^{-1}M$ convient. Mais Speiser prouve bien mieux que cela, à savoir que toute représentation est exactement de cette forme[37]. En décrétant que deux représentations $M_E, M_A, M_B, ...$ et $M'_E, M'_A, M'_B, ...$sont équivalentes s'il existe $N \in GL_n(K)$ telle que pour tout S de $\mathfrak{G}$, $M'_S = (N^S)^{-1}M_SN$, ce qu'établit Speiser est donc que toute représentation est équivalente à la représentation identité.

Speiser remarque également que son résultat contient le théorème 90 de Hilbert. En effet, la donnée d'un nombre A de norme 1 d'une extension cyclique K de groupe de Galois engendré par S permet la construction d'une représentation de Speiser d'ordre 1 via :

$$1 \mapsto 1,\ S \mapsto A, S^2 \mapsto AA^S, ..., S^l \mapsto AA^SA^{S^2}...A^{S^{l-1}}, ...$$

et le résultat de Speiser montre qu'il existe un élément B de $K^\times$ tel que $S \mapsto (B^S)^{-1}B$, donc $A = (B^S)^{-1}B$.

La revue *Mathematische Zeitschrift* fut créée en 1918 et Schur en fut un des premiers éditeurs. Il put donc étudier l'article de Speiser dès réception de celui-ci le 15 février 1919 et rebondit sur l'idée de Speiser d'un nouveau type de représentation. Le 8 avril, Schur soumit quelques remarques au sujet du travail de Speiser, qui furent publiées à la suite de celui-ci dans le volume 5 du *Mathematische Zeitschrift* ([210]).

Speiser avait bien indiqué que la matrice M_S telle que $M_S^{-1}\Gamma^SM_S = \Gamma$ n'est pas uniquement déterminée. Elle n'est en effet unique qu'à un facteur multiplicatif non nul près. Ceci donna à Schur l'idée de reprendre la notion de représentation au sens de Speiser, sous une forme plus générale, en demandant que les matrices de la représentation vérifient cette fois la relation :

$$M_S^TM_T = r_{S,T}M_{ST},$$

où les $r_{S,T}$ sont des éléments de K.

Schur avait en effet reconnu qu'en introduisant les quantités $r_{S,T}$, il pouvait formuler le concept de représentation de Speiser en des termes analogues

[37]Pour une représentation d'ordre 1, ce résultat peut être reformulé en termes cohomologiques par la trivialité de $H^1(\mathfrak{G}, K^\times)$. Pour le dire autrement, $K^\times$ est ici muni de l'action de $\mathfrak{G}$ et les représentations considérées par Speiser sont ce qu'on appelle des “morphismes croisés” (crossed homomorphisms) de $\mathfrak{G}$ dans $K^\times$. Les morphismes croisés de la forme $S \mapsto (M^S)^{-1}M$ sont les morphismes dits “principaux”. Dans ce cadre, tous les morphismes croisés sont donc principaux.

à ceux des représentations projectives qu'il avait étudiées dans son article [204] de 1904, auquel il fait référence. Si l'on s'abstrait du cadre des extensions galoisiennes en considérant un groupe quelconque, les représentations projectives de Schur se retrouvent comme cas particulier d'une représentation satisfaisant $M_S^T M_T = r_{S,T} M_{S,T}$, en supposant l'action du groupe triviale.

Une telle représentation correspond donc à un système de nombres $(r_{S,T})_{S,T\in\mathfrak{G}}$, que Schur nomme, comme dans [204], système de facteurs. Si l'on multiplie toutes les matrices M_S d'une représentation par des éléments c_S de $K^\times$, on obtient une nouvelle représentation correspondant au système de facteurs $(r'_{S,T} = \dfrac{c_S^T c_T}{c_{ST}} r_{S,T})$. A nouveau, de tels systèmes sont dits associés. L'associativité inhérente à $\mathfrak{G}$ implique que g^2 nombres non nuls de K, si g désigne l'ordre de $\mathfrak{G}$, forment un système de facteurs si et seulement s'ils vérifient la condition :

$$(A) \qquad r_{S,T}^U r_{ST,U} = r_{S,TU} r_{T,U}, \;\; S,T,U \in \mathfrak{G}.$$

Certains résultats que Schur avait obtenus une quinzaine d'années auparavant sur les représentations projectives se retrouvent sans mal pour ce nouveau type de représentation. Il sait ainsi montrer qu'à tout système de facteurs correspond une représentation (d'ordre g) et que sa puissance g-ième, $(r_{S,T}^g)$, est associée au système de facteurs $(\rho_{S,T} = 1)$. Il parvient en outre à établir que deux représentations irréductibles de même ordre, et correspondant au même système de facteurs, sont équivalentes. Le fait que toute représentation au sens de Speiser est équivalente à la représentation identité apparaît comme cas particulier de ce résultat, pour $(r_{S,T} = 1)$.

Schur conclut par un théorème stipulant qu'à tout système de facteurs correspond, à équivalence près, une unique représentation irréductible. Si m désigne l'ordre de la représentation irréductible correspondant à un système $(r_{S,T})$, alors m doit diviser l'ordre de toute représentation correspondant à ce système de facteurs, et en particulier m doit diviser g.

Ainsi, avec célérité et simplicité du fait de son étude antérieure des représentations projectives, Schur considère les nouveautés de Speiser sous un angle plus général, en faisant appel aux systèmes de facteurs. Speiser a montré que ses représentations sont utiles pour l'étude des représentations classiques, en particulier pour la détermination de l'indice, et Schur confirme l'intérêt de ces nouvelles représentations en montrant comment les propriétés arithmétiques des systèmes de facteurs apportent des informations sur les représentations irréductibles.

3.3 Lien entre représentations et algèbres associatives.

3.3.1 Les systèmes de facteurs de Brauer

Très tôt, Frobenius et Schur ont considéré les représentations sous un aspect différent de celui des représentations classiques de groupes finis[38], en mettant l'accent sur l'étude des "groupes de substitutions linéaires" en lesquels les représentations se retrouvent aisément. Ces "groupes"[39] n'en sont pas exactement car ils consistent en des ensembles de substitutions (ou, ce qui est égal, de matrices) stables par multiplication mais dont il n'est pas supposé que les éléments soient inversibles, ni même que la matrice identité leur appartienne. En outre ils ne sont pas nécessairement finis. Dans un article de 1909 [208] (en particulier p. 168), Schur adapta sa théorie de l'indice à ces "groupes".

Richard Brauer[40] (1901-1977) est né et a fait toutes ses études à Berlin, ville d'exercice d'Issai Schur. Celui-ci eut une profonde influence sur lui. Brauer participa aux séminaires qu'il organisait – au cours desquels il put étudier et présenter certains articles de Schur, comme [205] et [206] – et entreprit une thèse sous sa direction, dédiée aux représentations du groupe orthogonal.

Brauer était donc spécialiste de la théorie des représentations et particulièrement des travaux de Schur en la matière. Il poursuivit naturellement son travail dans ce domaine et prolongea l'étude des "groupes" irréductibles initiée par Schur dans [208]. Il traita notamment, dans la première partie de son "Habilitationsschrift" (1926), des systèmes de facteurs en lien avec les "groupes", dans la voie ouverte par les remarques de 1919 de Schur. Cette partie de sa thèse d'habilitation fut reproduite avec peu de changements dans un article du *Mathematische Zeitschrift* [23]. Il poursuivit ce travail dans un article [22] paru avant celui du *Mathematische Zeitschrift*.

Dans [23], Brauer ne s'intéresse pas tant au problème de l'indice qu'à la mise en évidence de ce que les propriétés des systèmes de facteurs introduits par Schur[41] déterminent les propriétés arithmétiques (en particulier l'ordre)

---

38. Cf. tout particulièrement [94].

39. Nous continuerons à employer les guillemets pour désigner ces groupes qui n'en sont pas.

40. Cf. [44] VI. 1. et [78].

41. Pour ce qui est des systèmes de facteurs, Brauer cite l'article de 1919 de Schur et son propre article [22] de 1926. Il est surprenant de ne pas voir apparaître l'article de 1904 de Schur [204]. Brauer considère peut-être que les systèmes de facteurs apparaissant dans les extensions de groupes sont à dissocier de ceux apparaissant dans les représentations... Mais

des “groupes” irréductibles correspondants.

Brauer s’inspire directement du travail de Speiser et de Schur pour introduire les systèmes de facteurs, mais modifie néanmoins l’approche menant à leur considération. Il se donne un corps K quelconque et un “groupe” irréductible $\mathfrak{H}$ dont les valeurs du caractère sont dans K (situation à laquelle on peut se ramener sans problème à partir des hypothèses de Speiser ou de Schur). Le “groupe” $\mathfrak{H}$ est alors rationnel dans une extension algébrique finie $K(\theta)$ de degré r de K. Les “groupes” $\mathfrak{H}_1$,$\mathfrak{H}_2$,..., $\mathfrak{H}_r$ obtenus à partir de $\mathfrak{H}$ en remplaçant θ par ses conjugués $\theta_1 = \theta$, θ_2,..., θ_r sont équivalents à $\mathfrak{H}$.[42] Ainsi existe-t-il des matrices $P_{\alpha\beta}$, où α, β sont dans $\{1, ..., r\}$, telles que

$$\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}\mathfrak{H}_\beta$$

et vérifiant les conditions, dites (A) :

1. $P_{\alpha\beta}$ est à coefficients dans $K(\theta_\alpha, \theta_\beta)$ et inversible ;
2. si l’on fait opérer sur $P_{\alpha\beta}$ un élément du groupe de Galois de $K(\theta_1, ..., \theta_r)/K$ envoyant θ_α sur θ_γ et θ_β sur θ_δ, on obtient $P_{\gamma\delta}$;
3. P_{11} est la matrice identité.

En outre, si un tel système de matrices $P_{\alpha\beta}$ est donné, alors[43] il détermine un système de r^3 quantités $c_{\alpha\beta\gamma}$ de $K(\theta_1, ..., \theta_r)$ telles que :

$$P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}.$$

C’est l’ensemble des $(c_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha,\beta,\gamma}$ que Brauer nomme système de facteurs. Le “groupe” $\mathfrak{H}$ détermine donc un système de facteurs ; en réalité, il en détermine plusieurs, car on n’a pas unicité du système des $P_{\alpha\beta}$. En effet, correspond à $\mathfrak{H}$ tout système de la forme $(k_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta})$, où les $k_{\alpha\beta}$ sont des nombres vérifiant les conditions (A). Un système $(k_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta})$ correspond à un système de facteurs $(c'_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha,\beta,\gamma}$ vérifiant $c'_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{k_{\alpha\beta}k_{\beta\gamma}}{k_{\alpha\gamma}}c_{\alpha\beta\gamma}$. Ceci définit une relation d’équivalence sur les systèmes de facteurs et Brauer dit que $(c_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha,\beta,\gamma}$ et $(c'_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont associés.

---

ceci nous semble difficilement concevable, ne serait-ce du fait du transfert des résultats de la théorie des représentations aux algèbres qu’il effectue peu après, qui prouve qu’il n’avait pas de problème réel à considérer d’un point de vue général des concepts apparaissant dans des domaines différents. Plus probablement Brauer ne connaissait pas lui-même l’article de 1904 de Schur, ce qui est un autre indice du fait qu’à peu près aucun de ses contemporains ne l’avait en mémoire.

[42] Car ils ont tous même ordre et même caractère.

[43] En partant de $\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}\mathfrak{H}_\beta$, on obtient $\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} = P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma}\mathfrak{H}_\gamma$. Or, comme on a aussi $\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\gamma} = P_{\alpha\gamma}\mathfrak{H}_\gamma$, le lemme de Schur montre l’existence de quantités $c_{\alpha\beta\gamma}$ telles que $P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}$.

Evidemment, les systèmes de facteurs déterminés par un "groupe" (en fait, toute une classe de systèmes de facteurs d'après un résultat de Brauer) apportent de nombreux enseignements sur le "groupe". Le fait qu'un "groupe" est K-rationnel si et seulement si ses systèmes de facteurs sont associés au système identité[44] était déjà implicitement présent dans l'étude de Speiser et est démontré dans l'article [22] de Brauer. Schur, dans [210], avait déjà regardé les puissances d'un système de facteurs, en montrant que tout système correspondant à un "groupe" fini d'ordre g a sa puissance g-ième associée au système identité[45]. Brauer ne se contente pas de ces résultats. Il a l'idée que la puissance d'un système de facteurs a un sens pour un "groupe" bien précis déterminé par $\mathfrak{H}$ et, en plus de considérer les puissances de systèmes, il les multiplie entre eux. Il munit ainsi les systèmes de facteurs d'une loi de composition, et interprète cette composition au niveau des "groupes" eux-mêmes.

Si deux "groupes" $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ sont donnés, Brauer définit leur produit $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$ comme l'ensemble des produits de Kroneckcer[46] $G \times H$, où G et H parcourent $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$. Il s'agit également d'un "groupe" et si $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ sont irréductibles, ont leurs caractères dans K et sont $K(\theta)$-rationnels, il en va de même de leur produit. En particulier, $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ déterminent des matrices $P_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$, ainsi que des systèmes de facteurs $(c_{\alpha\beta\gamma})$ et $(d_{\alpha\beta\gamma})$, et les matrices $Q_{\alpha\beta} \times P_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions (A) et déterminent[47] le système de facteurs $(c_{\alpha\beta\gamma} d_{\alpha\beta\gamma})$.

Grâce au produit, on peut définir les puissances d'un "groupe" $\mathfrak{H}$ par les relations $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^3 = \mathfrak{H}^2 \times \mathfrak{H}$, etc. Comme un "groupe" $\mathfrak{H}^n$ correspond au système de facteur $(c^n_{\alpha\beta\gamma})$, on peut relier les propriétés arithmétiques d'un système de facteurs à des propriétés sur les puissances du "groupe". En particulier, en appelant "exposant" d'un système de facteurs sa plus petite

---

[44] Comme tous les systèmes de facteurs correspondants à un "groupe" sont associés, il suffit en fait qu'un seul soit associé au système identité (on peut même parler du – et non d'un – système de facteurs d'un "groupe"). Le système identité est le système dont tous les éléments valent 1.

[45] Ce résultat est d'ailleurs un analogue d'un résultat plus ancien de Schur sur les systèmes de facteurs d'une extension de groupes, cf. [204] p. 27.

[46] Le produit de Kronecker $G \times H$ d'une matrice G de taille $m \times n$ par une matrice H de taille $p \times q$ est la matrice de taille $mp \times nq$

$$\begin{pmatrix} g_{11}H & \dots & g_{1n}H \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}H & \dots & g_{mn}H \end{pmatrix}.$$

[47] Il est en effet connu que, pour des matrices carrées G_1, G_2, H_1, H_2, avec G_1, G_2 de même ordre et H_1, H_2 de même ordre, le produit de Kroneckcer de matrices vérifie $(G_1 \times H_1)(G_2 \times H_2) = G_1 G_2 \times H_1 H_2$. De là vient facilement le fait que $(Q_{\alpha\beta} \times P_{\alpha\beta})(Q_{\beta\gamma} \times P_{\beta\gamma}) = c_{\alpha\beta\gamma} d_{\alpha\beta\gamma}(Q_{\alpha\gamma} \times P_{\alpha\gamma})$.

puissance associée au système identité, et le notant l, Brauer établit[48] :

Si le corps K contient les valeurs du caractère du "groupe" irréductible $\mathfrak{H}$, et si le système de facteurs de $\mathfrak{H}$ est d'exposant l, alors $\mathfrak{H}^\lambda$ est K-rationnel si et seulement si l divise λ.

Brauer prouve également que si l'on désigne par $\mathfrak{H}'$ le "groupe" formé des matrices ${}^tH$, où H parcourt $\mathfrak{H}$, alors :

Si le corps K contient les valeurs du caractère du "groupe" irréductible $\mathfrak{H}$, et si le système de facteurs de $\mathfrak{H}$ est d'exposant l, $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ est K-rationnel.[49]

Tels qu'introduits par Brauer, les systèmes de facteurs sont définis à un partir de "groupes" irréductibles $\mathfrak{H}$ et de matrices $P_{\alpha\beta}$ vérifiant certaines conditions. Mais Brauer parvient à les caractériser par leurs propriétés arithmétiques[50]. En particulier, il montre qu'ils doivent satisfaire la relation typique des systèmes de facteurs :

$$c_{\alpha\beta\gamma}c_{\alpha\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\delta}c_{\beta\gamma\delta}.$$

Néanmoins, dans ses résultats et manipulatons, les systèmes de facteurs apparaissent indissociables des "groupes", bien qu'ils puissent être définis sans. Dans cet ordre d'idée, la proposition VIII (p. 689) est une des plus importantes. Elle stipule que des "groupes" équivalents ont des systèmes de facteurs associés et, réciproquement, que si un groupe $\mathfrak{H}$ a un système de facteurs $(c_{\alpha\beta\gamma})$ et si $(d_{\alpha\beta\gamma})$ est associé à $(c_{\alpha\beta\gamma})$, alors il existe un "groupe" équivalent à $\mathfrak{H}$ de système de facteurs $(d_{\alpha\beta\gamma})$.

Comme les systèmes de facteurs sont caractérisés arithmétiquement, on peut définir directement un groupe des classes de systèmes de facteurs, sur le principe de la définition du multiplicateur de Schur. Mais Brauer n'en passe pas par là, tenant absolument à conserver le lien avec les "groupes". Il explique donc que l'on peut définir un groupe des classes de systèmes de facteurs[51] en utilisant le fait que deux systèmes de facteurs $(c_{\alpha\beta\gamma})$ et $(d_{\alpha\beta\gamma})$ correspondent, par définition, à deux groupes irréductibles $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{G}$, et en

[48] Satz I. p. 680.

[49] En transposant l'égalité $\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}\mathfrak{H}_\beta$, on obtient $P'_{\alpha\beta}\mathfrak{H}'_\alpha = \mathfrak{H}'_\beta P'_{\alpha\beta}$, d'où $\mathfrak{H}'_\alpha P'^{-1}_{\alpha\beta} = P'^{-1}_{\alpha\beta}\mathfrak{H}'_\beta$. En transposant et inversant la relation $P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}$, on voit que les $P'^{-1}_{\alpha\beta}$ satisfont la relation $P'^{-1}_{\alpha\beta}P'^{-1}_{\beta\gamma} = \dfrac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}}P'^{-1}_{\alpha\gamma}$. Le "groupe" $\mathfrak{H}'$ détermine donc le système de facteurs $(\frac{1}{c_{\alpha\beta\gamma}})_{\alpha,\beta,\gamma}$ et le "groupe" $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}'$ détermine par conséquent le système identité.

[50] Cf. Satz IV pp. 682-3.

[51] Il ne passe pas explicitement au quotient par la relation d'association, se contenant de dire qu'on peut considérer deux systèmes d'une même classe comme une seule et même entité.

définissant le produit de ces deux systèmes comme le système du produit $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$. Le groupe ainsi obtenu est abélien et tous ses éléments sont d'ordre fini, ordre qui est précisément l'exposant.

Si la définition d'un groupe de classes de systèmes de facteurs n'est pas une nouveauté, le lien qu'établit Brauer entre les systèmes et les "groupes" est plus profond et précis que celui qu'avait présenté Schur entre les systèmes et les extensions. En fait, d'après la proposition VIII de Brauer, on a un isomorphisme entre le groupe des classes de systèmes de facteurs et le groupe des classes d'équivalence de "groupes". Cet aspect n'est pas encore mis en avant par Brauer, qui ne définit pas un tel groupe, mais tous les résultats sont présents pour ce faire. Les propriétés arithmétiques des systèmes de facteurs se retrouvent donc au niveau de l'ensemble des classes de "groupes".

La suite immédiate de ces recherches mena Brauer à la théorie des algèbres centrales[52] simples, via le concept de corps de décomposition. Simultanément, Noether arrivait au même point que lui sur les algèbres centrales simples[53], mais par un chemin plus direct résultant de son intérêt propre pour les algèbres, sans détour par la théorie des représentations ou des "groupes".

Un "groupe" $\mathfrak{H}$ à coefficients dans K est dit absolument irréductible s'il est irréductible dans toute extension de K. Un théorème de Schur[54] établit que tout "groupe" rationnel et irréductible dans K se décompose dans $\mathbb{C}$ en r "groupes" absolument irréductibles, distincts et de même degré. Ces r "groupes" sont ce qu'on appelle les composantes absolument irréductibles. Un corps de décomposition est, par définition, une extension algébrique de degré fini de K dans laquelle $\mathfrak{H}$ se décompose en composantes absolument irréductibles. Le degré sur K de tout corps de décomposition est divisible par l'indice de Schur de $\mathfrak{H}$ relativement à K.

Du fait de leur correspondance, Noether et Brauer se rendirent compte de la proximité de leurs investigations[55], et décidèrent d'une publication commune [26]. Celle-ci trace les grandes lignes des corps de décompositions et de leurs propriétés caractéristiques. Elle discute surtout d'un fait qui nous intéresse moins, à savoir que le degré d'un corps de décomposition minimal

[52] Une K-algèbre est dite centrale si son centre est exactement K.

[53] Les principales contributions de Noether à la théorie des algèbres sont [172], [173] et [175]. Noether replace en fait la théorie des algèbres et celle des représentations dans un cadre plus général, à savoir celui des anneaux non commutatifs soumis à une condition de finitude – en termes modernes, des anneaux à la fois noetheriens et artiniens. On pourra par exemple consulter [44], qui explique en détail l'approche et les résultats de Noether dans [172] et [196] qui traite plus généralement l'apport de Noether au développement de la théorie des algèbres.

[54] Cf. [208], IV p. 167.

[55] Cf. [44] p. 203.

est non nécessairement borné. Une étude plus détaillée des corps de décomposition, et plus généralement du lien entre les algèbres centrales simples et les représentations, est proposée par Brauer dans un article légèrement plus tardif, soumis en avril 1928 [24].

3.3.2 Le groupe de Brauer

Dans son analyse des liens entre les "groupes" et les systèmes de facteurs, Brauer voulut préciser des propriétés partagées par tous les "groupes" correspondant à des systèmes de facteurs associés. Il en vint à considérer des "groupes" qu'il qualifia de "complets par rapport à K"[56]. Ces "groupes" sont ceux qui sont stables par combinaison linéaire à coefficients dans K, c'est-à-dire ceux formant une K-algèbre, du fait de la stabilité par multiplication inhérente aux "groupes". Le concept de "groupe" complet engendré par un "groupe" donné $\mathfrak{H}$, qui n'est rien d'autre que $K[\mathfrak{H}]$, joue un rôle important car il est rationnel dans le même corps $K(\theta)$ que $\mathfrak{H}$, et admet le même système de facteurs. Il permet de caractériser les "groupes" de même ordre ayant le même système de facteurs[57]. Ainsi les algèbres apparaissent-elles dans le travail de Brauer, via le fait qu'à un système de facteurs donné correspond un unique "groupe" irréductible complet d'ordre fixé. Dans [24], Brauer s'attaque à l'étude systématique des algèbres[58] à l'aide des connaissances sur les représentations, en particulier grâce aux systèmes de facteurs. L'idée de représentation d'un groupe s'étend naturellement à celle de représentation d'une algèbre, vu qu'une représentation d'une algèbre fournit un "groupe" complet[59]. Brauer parvient à établir un dictionnaire des propriétés d'une algèbre semi-simple à l'aide de ses représentations. Dans cet ordre d'idée, on retiendra par exemple le fait que toute algèbre simple sur K admet une

[56]Cf. [23], p. 686 : "in bezug auf einem Zahlkörper K komplett".

[57]C'est ce qu'indique la Satz V, p. 686, de [23], qui stipule :

Soit deux groupes irréductibles $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{H}$, avec $\mathfrak{H}$ complet, dont les valeurs des caractères respectifs sont dans K. S'ils sont tous deux $K(\theta)$-rationnels, admettent le même système de facteurs et sont de même ordre, alors $\mathfrak{F}$ est équivalent à un sous-groupe de $\mathfrak{H}$.

[58]Brauer suppose toujours le corps de base parfait, ce qui est un aspect un peu moins satisfaisant de son approche par rapport à celle de Noether, qui se place sur un corps quelconque.

[59]Précisément, pour Brauer, une représentation d'une algèbre A est un "groupe" $\mathfrak{A}$ de matrices de même ordre n, tel qu'il existe une application surjective de A dans $\mathfrak{A}$ respectant l'addition et la multiplication, et envoyant tout élément x de K sur la matrice xI_n. Une représentation de A est donc associée à un morphisme d'algèbre de A dans $M_n(\mathbb{C})$ pour un certain entier n.

unique représentation irréductible[60]. Soit donc $\mathfrak{A}$ la représentation irréductible dans K associée à une K-algèbre simple A, le "groupe" $\mathfrak{A}$ se décompose en un certain nombre r de composantes absolument irréductibles, nécessairement distinctes, de même ordre f.[61] Le rang de A sur K vaut donc rf^2. Si $\mathfrak{F}$ désigne une quelconque de ces composantes, alors le corps Z obtenu par extension de K à l'aide des valeurs du caractère de $\mathfrak{F}$ est une extension de K de degré r. Il se trouve que le centre de A consiste exactement en les matrices cI_f, où c parcourt Z, donc le centre de A est isomorphe à Z.[62]

Lorsque $r = 1$, K est confondu avec le centre de l'algèbre A, qui est donc centrale simple sur K. Brauer montre[63] que A ne contient aucun diviseur de zéro[64] si et seulement si $f = m$, où m est l'indice de Schur $\mathfrak{A}$ relativement à K. Or, dans l'étude des algèbres à division, on peut se restreindre au cas où le centre Z de A est égal à K car on peut aussi bien voir une algèbre à division sur K comme une algèbre à division sur Z.

Ainsi, si l'on se donne une algèbre à division centrale sur K, elle est de rang m^2 et son unique représentation irréductible $\mathfrak{F}$ est d'ordre m. Celle-ci admet un système de facteurs dont Brauer montre qu'il la caractérise[65]. Il sait donc associer de manière biunivoque un système de facteurs à une algèbre à division centrale. Ainsi Brauer ramène-t-il la détermination des algèbres à division sur K à la détermination de tous les systèmes de facteurs sur Z, où Z est une extension algébrique finie de K.

Brauer réussit ainsi à ramener la théorie des algèbres simples, qui se réduit à la théorie des algèbres à division, à ses connaissances issues de la théorie des représentations, et utilise encore une fois les systèmes de facteurs pour caractériser ses objets d'étude. Nous avons déjà pu voir précédemment que les classes de systèmes de facteurs étaient en correspondance biunivoque avec les classes de "groupes". Brauer en vient peu après à mettre en lumière et préciser cette correspondance.

---

[60] Il s'agit de la "Satz 1" p. 87.

[61] Les résultats utilisés par Brauer au sujet des "groupes" sont listés dans le premier paragraphe de [24]. Rappelons qu'une extension algébrique finie de K dans laquelle une telle décomposition a lieu est un corps de décomposition.

[62] Cf. §3 de [24] pour tout ce raisonnement.

[63] Cf. [24], Satz 2 p. 91.

[64] A est donc une algèbre à division, étant donné que toute algèbre associative unitaire de rang fini (toutes les algèbres considérées dans cette thèse étant ainsi) et sans diviseur de zéro est une algèbre à division (cela vient facilement de ce que tout élément de l'algèbre satisfait à une équation polynômiale à coefficients dans K).

[65] Bien entendu, il la caractérise à partir du moment où l'on considère deux "groupes" équivalents comme une seule et même entité, de même que deux systèmes de facteurs associés.

Un des théorèmes démontrés par Brauer dans [24] (Satz 10 p. 104) est mentionné dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* de 1929.[66] Il stipule :

Si A est une algèbre centrale sur K, de rang m^2 et sans diviseur de zéro, où $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, alors on peut écrire A comme un produit $A_1 \times A_2 \times ... \times A_r$,[67] où A_ρ, où chaque A_ρ est une algèbre sans diviseur de zéro, centrale sur K et de rang $(p_\rho^{\alpha_\rho})^2$.

Dans le court texte accompagnant ce théorème dans le *Jahresbericht*, Brauer livre quelques réflexions inspirées par la démonstration de celui-ci. Il part du fait que toute K-algèbre simple est, d'après le théorème de structure de Wedderburn, isomorphe à une algèbre totale de matrices à coefficients dans une algèbre à division Δ, déterminée uniquement à isomorphisme près. Si l'on se donne deux algèbres A_1 et A_2 centrales simples sur K, alors on peut montrer que $A_1 \times A_2 = A_3$ est également centrale simple sur K. Chacune des A_i détermine, par le théorème de Wedderburn, une algèbre à division Δ_i. Ici, Δ_3 est bien déterminée par Δ_1 et Δ_2,[68] ce qui fait que l'on peut munir l'ensemble des algèbres à division de centre K d'une loi de composition (associant donc Δ_3 à (Δ_1, Δ_2)), qui en fait un groupe abélien. Tout élément de ce groupe est d'ordre fini, et l'on peut prouver que l'ordre l de toute algèbre à division Δ (en tant qu'élément de ce groupe) divise m, si Δ est de rang m^2. De plus tout nombre premier divisant m divise également l.

Ce groupe dont Brauer esquisse la construction apparaît pour la première fois dans un article en 1932.[69] Il est retenu dans la littérature mathématique sous l'appellation "groupe de Brauer". Il s'agit donc du groupe abélien des algèbres à division centrales sur un corps K fixé[70], et il est isomorphe au groupe des systèmes de facteurs que Brauer sait caractériser arithmétiquement. L'idée du groupe de Brauer était déjà présente au niveau des "groupes"

[66] Précisément, cf. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **38** (1929), 47-48.

[67] Brauer désigne bien par cette notation un produit direct d'algèbres – c'est d'ailleurs la terminologie qu'il utilise. Il prend néanmoins la peine d'en redonner la définition dans [24], p. 102. On pourra remarquer que, contrairement à Wedderburn dans [234], Brauer mentionne bien l'action du corps de base K dans la définition d'un produit d'algèbres sur K, via $k(\alpha \times \beta) = (k\alpha) \times \beta = \alpha \times (k\beta)$. L'usage de la notation $\times$ pour les algèbres est cohérente avec celle utilisée pour les "groupes" au sens où si $\mathfrak{A}$ est une représentation d'une algèbre A et $\mathfrak{B}$ une représentation d'une algèbre B, alors le "groupe" complet engendré par $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ est une représentation de $A \times B$.

[68] car, pour toutes algèbres totales de matrices $M_s(\Delta_1)$ et $M_t(\Delta_2)$, on a $M_s(\Delta_1) \times M_t(\Delta_2) \simeq M_{st}(\Delta_3)$.

[69] Cf. [25].

[70] encore supposé parfait par Brauer dans [25], mais on peut enlever cette restriction.

dans [23] et l'idée du groupe des systèmes de facteurs remonte à Schur dans le cadre des extensions de groupes, avec le multiplicateur. Le groupe de Brauer possède donc un analogue dans diverses théories algébriques[71].

3.4 D'autres résultats de nature cohomologique

Il y aurait encore beaucoup à dire sur les résultats cohomologiques que l'on peut identifier dans l'histoire de l'algèbre avant que ne soit mise au point la cohomologie des groupes. Nous ne prétendons pas à l'exhaustivité et avons surtout insisté sur les systèmes de facteurs et le concept lié de groupe de Brauer, qui s'interprètent par des résultats de cohomologie en dimension 2, et sont véritablement très présents en algèbre à compter de la fin des années 1920. [72] Le théorème 90 de Hilbert et le résultat de Speiser vu dans ce chapitre relèvent eux de la cohomologie en dimension 1. Ils sont loin d'en être les seules occurrences mais en sont probablement les premières. Ils sont tous deux des expressions dans des cadres particuliers d'un théorème global, dit "théorème du genre principal", dont l'histoire a été dressée par Franz Lemmermeyer dans [147].

On peut même trouver une relation[73] typique de la cohomologie en dimension 3 dans un article de 1940 d'Oswald Teichmüller [220], qui se situe dans la lignée de la généralisation de la théorie de Galois aux algèbres. Nous revenons brièvement dessus en 9.6. L'étude de cet article n'est pas cruciale dans le cadre de cette thèse mais on en trouvera néanmoins une, superficielle, en annexe. Elle permettra au lecteur éventuellement intéressé d'aborder plus sereinement cet article peu connu[74] de Teichmüller, qui fait intervenir quelques calculs alambiqués et se présente rédigé intégralement à l'aide de l'alphabet Fraktur[75]. Cet article donne une bonne idée des difficultés qui peuvent se présenter à manipuler des relations d'essence cohomologique sans avoir à disposition la cohomologie des groupes.

[71] On ne peut pas considérer que Schur avait considéré un tel groupe dans [204] car il lui manquait l'interprétation du produit de systèmes de facteurs au niveau d'un produit d'extensions. Néanmoins, le pendant du groupe de Brauer dans les extensions est défini par Baer en 1934, dans [16]. Voir la section 4.2.3.

[72] Nous étudions à nouveau les systèmes de facteurs en lien avec les extensions dans le chapitre 4.

[73] Précisément, il s'agit de la relation définissant un 3-cocycle.

[74] Il fut publié dans l'éphémère revue *Deutsche Mathematik* fondée par Ludwig Bieberbach au cours du Troisième Reich, qui entendait mettre en avant l'idée de mathématiques "allemandes" et s'opposait un soi-disant style "juif" de mathématiques. A ce sujet, on pourra consulter [165]. Si cet article est rarement cité dans la littérature mathématique, on mentionnera cependant à ce sujet l'exception notable de Saunders Mac Lane.

[75] l'écriture Fraktur est un type d'alphabet gothique.

Chapitre 4

Le problème des extensions de groupes

Le problème général des extensions de groupes consiste à déterminer, étant donnés deux groupes quelconques A et B, tous les groupes E dont A est un sous-groupe distingué et tels que $E/A \simeq B$. Le produit direct et les produits semi-directs sont les exemples les plus simples et les plus classiques d'extension. Le problème des extensions a été pour la première fois abordé sous cette forme générale en 1926 par Otto Schreier ([199]).

Pour autant, la notion d'extension d'un groupe par un autre est antérieure à cet article [199] de 1926. Dans les premiers articles et traités consacrés aux groupes abstraits, on peut trouver des précurseurs de l'idée d'extension d'un groupe par un autre, ou des manifestations particulières de telles extensions. Dans les travaux d'Hölder par exemple, on peut reconnaître des produits semi-directs dans [115] dans la description de certains groupes[1] ou encore voir formulé le problème de la recherche d'extensions dans [116][2].

[1] Hölder cherchait à décrire la structure de groupes particuliers, à savoir ceux d'ordres p^3, pq^2, pqr, p^4.

[2] Hölder y considère cependant uniquement des groupes finis. Il part en fait du théorème dit de Jordan-Hölder, qu'il avait lui-même établi sous sa forme définitive (cf. l'analyse de Corry, [43] I.1., sur la reformulation et l'amélioration par Hölder du théorème originel de Jordan) dans [114]. Ce théorème énonce que tout groupe fini G est caractérisé par une suite de Jordan-Hölder, c'est-à-dire une suite de sous-groupes $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_{n-1} \supset G_n = \{1\}$ telle que pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, G_{i+1} est distingué dans G_i et G_i/G_{i+1} est simple. Précisément, la donnée de n et de l'ensemble des groupes quotients G_i/G_{i+1} détermine G. Hölder propose le problème suivant : retrouver G à partir de la donnée de n et des quotients. Or ce problème se ramène à la détermination successives de n extensions de groupes, ce qu'il formule ainsi :

"Man hat dabei mehrmals das Problem zu lösen : *eine Gruppe Δ zu bilden, welche eine gegebene Gruppe Γ auf die Weise ausgezeichnet enthält, dass zugleich Δ/Γ mit einer*

On trouve également le problème des extensions abordé dans le traité [211] de 1904 de de Séguier, sous une forme assez différente de celle de Hölder. Il y considère en effet un groupe G défini par générateurs et relations et étudie le cas où l'on divise l'ensemble des générateurs en deux familles $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$. Il regarde ce qu'il advient si, par exemple, on remplace tous les a_i par 1 ; les relations nouvellement formées définissent un groupe B qui n'est pas forcément inclus dans G. Il montre que pour certains systèmes de relations, le groupe G est un produit direct de B et du groupe A obtenu en faisant $b_i = 1$ pour tout i. Il considère également un système de relations pour lequel on peut montrer que G contient uniquement des quantités de la forme $\alpha(a)\beta(b)$.

A la même époque que de Séguier, Schur a, comme nous l'avons vu précédemment[3], déterminé une construction abstraite d'une extension centrale d'un groupe fini pour répondre à un problème de la théorie des représentations. Il ne s'agissait pas, comme a pu le faire Hölder, de déterminer des groupes d'un ordre donné. Il s'agissait d'un problème existentiel, à savoir montrer que tout groupe fini admet un groupe de représentation, et Schur a construit un groupe de représentation général en se donnant un groupe défini par générateurs et relations, dont les relations codaient celles de la représentation.

Schur avait remarqué que les relations définissant le groupe $\mathfrak{H}$ par lequel il voulait faire l'extension en induisaient des analogues au sein de l'extension. Comme $\mathfrak{H}$ pouvait désigner n'importe quel groupe fini, il n'existait aucune manière simple de le décrire à l'aide de générateurs et relations[4]. Il en était donc réduit à considérer toutes les relations potentiellement présentes dans $\mathfrak{H}$. Or celles-ci découlent toutes de la table de multiplication de $\mathfrak{H}$. C'est pour cela que Schur s'était donné un générateur Q_λ pour chaque élément de $\mathfrak{H}$ et avait cherché à traduire au sein du groupe libre engendré par Q_λ la relation $H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)}$ définissant la multiplication de $\mathfrak{H}$ (cf. 2.3). Le lecteur pourra comparer cette construction de Schur avec les méthodes générales, développées par Baer et Hall notamment, que nous évoquerons dans ce chapitre.

Il ne se passa rien de notable après Schur en théorie des extensions jusqu'à l'étude systématique de Schreier [199]. Pourtant l'idée de considérer un système de générateurs et relations pour le groupe dont on fait l'extension était féconde.

---

gegebenen Gruppe übereinstimmt."

[3]Cf. chapitre 2.

[4]Alors que s'il avait été supposé cyclique d'ordre n par exemple, il aurait pu être présenté très simplement par la donnée d'un générateur z et de la relation $z^n = 1$.

4.1 La codification des extensions de groupes par Schreier

Le travail de Schur sur les représentations par des substitutions linéaires fractionnaires semble avoir été oublié dans les décennies qui suivirent[5]. Le sujet des extensions de groupes ne connut aucun rebond notable malgré la portée de la méthode employée par Schur pour la preuve de l'existence d'un groupe de représentation. Ce n'est qu'une vingtaine d'années plus tard que le sujet fut relancé, par l'intermédiaire de la thèse d'Otto Schreier. Cette thèse fut publiée en deux parties [199] et [200]. La seconde partie montre bien, par tous les exemples qu'elle contient, que l'étude de Schreier visait la recherche d'extensions bien précises. Pour autant la première partie pose, elle, le problème des extensions de manière absolument générale, sans restriction sur les groupes impliqués, et s'efforce de le traiter de manière aussi systématique que possible – jusqu'à être bloquée par la difficulté due à la trop grande généralité du problème. Nous allons commencer par donner une idée de la motivation que Schreier avait en étudiant les extensions. Dans un deuxième temps nous préciserons la manière qu'a Schreier d'aborder le problème des extensions et les résultats auxquels il aboutit. Nous n'entrerons par contre pas dans le détail des exemples qu'il traite dans la deuxième partie de son travail car c'est sans lien direct avec notre mémoire.

4.1.1 Une motivation précise

Otto Schreier (1901-1929) était un mathématicien autrichien, né à Vienne. Il y effectua toute sa scolarité puis débuta sa carrière d'enseignant-chercheur à Hambourg. Il fut nommé "aussordentlichen Professor" à l'Université de Rostock en 1928 et mourut de maladie peu après.

Malgré la très courte carrière de Schreier, son nom est assez connu des mathématiciens. Ceci vient principalement de sa collaboration avec Emil Artin à l'article *Algebraische Konstruktion reeller Körper* [13], qui aborde la théorie algébrique des corps réels.

Nous faisons une parenthèse très succincte pour présenter le problème abordé dans [13]. En introduction de cet article est rappelée la contribution d'Ernst Steinitz [215], qui se place d'un point de vue très abstrait pour appréhender notions et raisonnements, et parvient ainsi à asservir de vastes domaines de l'algèbre. Artin et Schreier remarquent que, malgré le succès du point de vue de Steinitz, certains domaines n'ont jusqu'alors pu être soumis aux méthodes abstraites qu'il a développées ; ils citent entre autres la théorie

[5] Nous détaillons ce point en 4.1.3

du corps de classes, le théorème de Sturm sur le nombre de racines réelles d'une équation et l'algèbre réelle. Leur objectif est de décrire par des axiomes simples les corps réels, en se demandant ce qui les distingue des autres corps. La définition qu'ils retiennent est :

Un corps est dit réel si dans celui-ci -1 *n'est pas représentable comme une somme de carrés.*

Si le nom de Schreier est connu aujourd'hui principalement pour sa participation à l'édification de la théorie algébrique des corps réels, son domaine privilégié d'investigations fut la théorie des groupes[6]. Son "Habilitationsschrift"[7] a d'ailleurs pour thème les sous-groupes des groupes libres ; il y prouve que tout sous-groupe d'un groupe libre est lui-même libre. Et ce qui nous intéresse particulièrement ici est la "Dissertation" de Schreier, qui traite le problème des extensions de groupes.

Schreier a entrepris sa thèse à Vienne sous la direction de Philipp Furtwängler, spécialiste de théorie des nombres. On peut se demander quel intérêt portait un spécialiste de la théorie des nombres au problème des extensions de groupes. C'est la deuxième partie de la thèse de Schreier qui répond à cette question ; il y applique les résultats théoriques obtenus dans la première partie de sa thèse à l'étude des groupes "métabéliens" (i.e. dont le groupe dérivé est commutatif) et en particulier aux groupes d'ordre une puissance d'un nombre premier. Karl Menger explique[8] que les résultats obtenus par Schreier furent notamment utiles à Furtwängler pour sa preuve du "Hauptidealsatz", ou encore à Helmut Hasse pour ses travaux sur la théorie du corps de classes.

Le "Hauptidealsatz"[9] évoqué ici concerne la théorie du corps de classes. Il s'agit à l'origine d'un problème fondamental de ce domaine, posé par Hilbert, consistant à montrer que si I est un idéal de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ d'un corps de nombres K, alors $I\mathcal{O}_L$ est un idéal principal de l'anneau $\mathcal{O}_L$ des entiers du corps de classes de Hilbert L. Le corps de classes de Hilbert d'un corps k est l'extension non ramifiée abélienne maximale de k. Le "Hauptidealsatz" est donc un problème traitant d'extensions de corps, ce qui peut se ramener, via le groupe de Galois d'une extension, à un problème d'extension de groupes. En soumettant un sujet portant sur les extensions de groupes à un théoricien des groupes comme Schreier, il n'est donc pas surprenant que Furtwängler ait pu espérer en exploiter certains résultats pour l'établissement

[6]Cf. [166].

[7]*Über die Untergruppen der freien Gruppen* [201].

[8]Cf. [166] p. 2.

[9]Pour une présentation brève et claire de ce théorème, on pourra consulter par exemple [39] II.6.A.

du "Hauptidealsatz". Cet espoir ne fut pas déçu et d'ailleurs, parmi les applications présentes dans la seconde partie de la thèse de Schreier, certaines ont intéressé directement les spécialistes de la théorie du corps de classes[10].

4.1.2 Un traitement systématique

Nous étudions donc ici la première partie – publiée avec de légères retouches – de la thèse de Schreier [199]. Celle-ci consiste en trois paragraphes ; le premier traite de façon générale des extensions d'un groupe quelconque par un autre tandis que le deuxième s'intéresse aux extensions d'un groupe par un produit direct de groupes et le troisième et dernier aux extensions d'un groupe par un groupe abélien. Nous n'analyserons que le premier paragraphe.

Voici comment Schreier pose son problème : étant donnés deux groupes quelconques $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, il cherche tous les groupes $\overline{\mathfrak{B}}$ dont $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe distingué, et tels que $\overline{\mathfrak{B}}/\mathfrak{A}$ est isomorphe à $\mathfrak{B}$. Un tel groupe $\overline{\mathfrak{B}}$ est dit[11] "extension de $\mathfrak{A}$ à l'aide de $\mathfrak{B}$" ou, pour abréger, "extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$". Il aborde ce problème sans détour, en raisonnant par conditions nécessaires. Ainsi se pose-t-il la question suivante : une telle extension étant donnée, quelles propriétés vérifie-t-elle obligatoirement ?

Il considère donc une extension quelconque $\overline{\mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ et se donne un isomorphisme de $\overline{\mathfrak{B}}/\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. Via cet isomorphisme correspond à tout élément B de $\mathfrak{B}$ une classe de $\overline{\mathfrak{B}}$ modulo $\mathfrak{A}$, dans laquelle il choisit (de manière arbitraire) et fixe un élément $\bar{B}$. Il impose juste la condition $\bar{E} = E$.[12]

Comme $\overline{\mathfrak{B}}/\mathfrak{A}$ est isomorphe à $\mathfrak{B}$, tout élément de $\overline{\mathfrak{B}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\bar{B}A$ (nous parlerons de "l'écriture générique" des éléments de $\overline{\mathfrak{B}}$), où A parcourt $\mathfrak{A}$ et B parcourt $\mathfrak{B}$. Pour connaître la multiplication au sein de $\overline{\mathfrak{B}}$, il convient de savoir comment un produit $\bar{B}A\overline{B'}A'$ peut s'écrire sous la forme $\overline{B_1}\, A_1$. En particulier on doit connaître l'écriture générique d'éléments de la forme $A'\overline{B'}$ et $\overline{B'}\ \overline{B''}$; et, comme on peut le vé-

[10]On pense en particulier à Artin et Hasse, Artin indiquant à Hasse, dans sa lettre du 2 août 1927, la thèse de Schreier, et plus particulièrement deux résultats de la deuxième partie de celle-ci, comme étant une aide substantielle pour leurs recherches. Cf. *Emil Artin und Helmut Hasse : Die Korrespondenz 1923-1934* [84] p. 194. La correspondance entre Artin et Hasse à laquelle nous renvoyons ici s'avère précieuse pour qui s'intéresse à l'histoire de la théorie du corps de classes.

[11]Sa dénomination est inverse de celle de Schur, qui aurait dit, lui, si l'on se fie à [204], "extension de $\mathfrak{B}$ à l'aide de $\mathfrak{A}$". La terminologie de Schreier comme celle de Schur sont également utilisées aujourd'hui ; ce n'est qu'une question de convention. Tous les articles mentionnés dans ce chapitre adoptent la terminologie de Schreier et nous en ferons maintenant de même, ce pour le reste de ce mémoire.

[12]Dans cette égalité, le E apparaissant dans "$\bar{E}$" est le neutre de $\mathfrak{B}$ alors que le E du terme de droite de l'égalité est le neutre de $\overline{\mathfrak{B}}$ (qui est également le neutre de $\mathfrak{A}$).

rifier aisément, cette connaissance suffit à déterminer comment un produit $\overline{B}A\overline{B'}A'$ peut s'écrire sous la forme $\overline{B_1}\,A_1$.

L'élément $A\overline{B}$ appartient à la classe $\overline{B}\,\mathfrak{A}$[13] et $\overline{B'}\,\overline{B''}$ est dans la même classe que $\overline{B'B''}$, à savoir $\overline{B'B''}\mathfrak{A}$. Il existe donc des éléments de $\mathfrak{A}$, que Schreier note A^B et $A_{B',B''}$, tels que $A\overline{B} = \overline{B}A^B$ et $\overline{B'}\,\overline{B''} = \overline{B'B''}A_{B',B''}$. En particulier $E^B = E$, pour tout B de $\mathfrak{B}$.

Cette première analyse effectuée, Schreier reprend le problème en sens inverse. Il ne suppose plus $\overline{\mathfrak{B}}$ construit mais se demande plutôt quelles conditions doivent vérifier les éléments A^B et $A_{B',B''}$ pour que la donnée de $\mathfrak{A}$, de $\mathfrak{B}$ et des relations $A\overline{B} = \overline{B}A^B$ et $\overline{B'}\,\overline{B''} = \overline{B'B''}A_{B',B''}$ définisse une extension $\overline{\mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$. Il prend pour convention $\overline{E} = E$ et suppose $E^B = E$, pour tout B.

Il utilise les relations précédentes pour calculer le produit de deux éléments génériques de $\overline{\mathfrak{B}}$: ainsi $\overline{B'}A'\overline{B''}A'' = \overline{B'}\,\overline{B''}A'^{B''}A'' = \overline{B'B''}A_{B',B''}A'^{B''}A''$, et $\overline{B'}A'\overline{B''}A''$ a bien été réécrit comme produit d'un élément de $\overline{\mathfrak{B}}$ et d'un élément de $\mathfrak{A}$. Schreier décide d'adopter une présentation héritée de Hölder, consistant à écrire tout élément $\overline{B}A$ comme un couple $\{B, A\}$[14], le premier élément du couple étant un élément de $\mathfrak{B}$ et le second un élément de $\mathfrak{A}$. Deux tels couples ne sont décrétés égaux que si leurs deux composantes sont égales et on peut, au vu de ce qui précède, composer deux couples de la manière suivante :

$$\{B', A'\}\{B'', A''\} = \{B'B'', A_{B',B''}A'^{B''}A''\}.$$

La représentation des éléments d'une extension comme couples n'est qu'une écriture clarifiant les égalités, et permettant de ne faire intervenir que les éléments de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{A}$ (et de ne plus faire apparaître continuellement des représentants $\overline{B}$) mais ceci ne change rien au problème que se pose Schreier. Il reprend donc naturellement son étude en cherchant les relations que doivent vérifier les A^B et $A_{B',B''}$ pour que l'ensemble des paires $\{B, A\}$ forme un groupe de neutre $\{E, E\}$. Il possède pour l'instant un ensemble (de paires) muni d'une loi de composition interne. Pour obtenir un groupe, il faut que cette loi soit associative, qu'elle admette un élément neutre (et il impose que cet élément soit $\{E, E\}$) et que toute paire admette un inverse. Ces trois exigences se traduisent par les conditions

$$(I) \qquad (\{B', A'\}\{B'', A''\})\{B''', A'''\} = \{B', A'\}(\{B'', A''\}\{B''', A'''\}),$$

[13] En effet, $A\overline{B} = \overline{B}\,\overline{B}^{-1}A\overline{B}$ et $\overline{B}^{-1}A\overline{B}$ est dans $\mathfrak{A}$ car $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe distingué de $\overline{\mathfrak{B}}$.

[14] Cette présentation fait peut-être apparaître plus clairement le fait qu'il y a une bijection ensembliste entre $\overline{\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}$.

$$(II) \qquad \{B, A\}\{E, E\} = \{B, A\},$$

et, pour tous B et A, l'existence d'éléments B^* et A^* tels que :

$$(III) \qquad \{B, A\}\{B^*, A^*\} = \{E, E\}.$$

Cette dernière condition est en fait vérifiée sans qu'on ait aucune propriété supplémentaire à demander : la relation (III) est en effet satisfaite par le couple $\{B^* = B^{-1}, A^* = (A^{B^{-1}})^{-1}A^{-1}_{B,B^{-1}}\}$. Les conditions (I) et (II) sont quant à elles respectivement équivalentes aux conditions

$$(1) \qquad A_{B'B'',B'''}(A_{B',B''}A'^{B''}A'')^{B'''}A''' = A_{B',B''B'''}A'^{B''B'''}A_{B'',B'''}A''^{B'''}A'''$$

et

$$(2) \qquad A_{B,E}A^E = A.$$

Si l'on pose $A = E$, (2) devient[15] :

$$(3), \qquad A_{B,E} = E$$

et on en déduit immédiatement :

$$(4) \qquad A^E = A.$$

En spécialisant les quantités intervenant dans (1) et en utilisant (3) et (4), Schreier obtient des conditions nécessaires – qui découlent donc de (I) et (II) – à ce que l'ensemble des couples $\{B, A\}$ forme un groupe. En posant $B'' = E$ et $B''' = B$ dans (1), on arrive à la relation $(A_{B',E}A'^E A'')^B = A'^B A_{E,B}A''^B$ qui, à l'aide de (3) et (4), fournit la relation $(A'A'')^B = A'^B A_{E,B}A''^B$. En posant $A' = A'' = E$, Schreier obtient finalement

$$(6) \qquad A_{E,B} = E$$

dont il déduit

$$(5) \qquad (A'A'')^B = A'^B A''^B.$$

Utilisant (5), Schreier réécrit (1) sous la forme $A_{B'B'',B'''}A^{B'''}_{B',B''}(A'^{B''})^{B'''} = A_{B',B''B'''}A'^{B''B'''}A_{B'',B'''}$. Posant $B' = E$, $A' = A$, $B'' = B'$ et $B''' = B''$, ceci fournit :

$$(7) \qquad (A^{B'})^{B''} = A^{-1}_{B',B''}A^{B'B''}A_{B',B''}$$

[15]On a $E^E = E$ car Schreier suppose que $E^B = E$ pour tout B dans $\mathfrak{B}$.

puis

$$(8) \qquad A_{B'B'',B'''}A_{B',B''}^{B'''} = A_{B',B''B'''}A_{B'',B'''}.$$

Les relations (3) à (8) ont été obtenues à partir de (1), (2) et de l'hypothèse $E^B = E$; ce sont donc des conditions nécessaires à ce que l'ensemble des couples $\{B, A\}$ forme un groupe de neutre $\{E, E\}$. Mais il est aisé de retrouver (1), (2) et $E^B = E$ en partant des relations (3) à (8). Ce sont donc également des conditions suffisantes.

Schreier suppose maintenant que les relations (3) à (8) sont satisfaites. On peut vérifier qu'on a, en particulier, $\{B, E\}\{E, A\} = \{B, A\}$. Le groupe des couples $\{B, A\}$ est donc engendré par les couples $\{B, E\}$ et $\{E, A\}$, dont les règles de composition sont :

$$(IV) \qquad \{E, A'\}\{E, A''\} = \{E, A'A''\},$$

$$(V) \qquad \{E, A\}\{B, E\} = \{B, E\}\{E, A^B\},$$

$$(VI) \qquad \{B', E\}\{B'', E\} = \{B'B'', E\}\{E, A_{B',B''}\}.$$

Et si l'on se donne un ensemble de couples $\{B, E\}$ et $\{E, A\}$ vérifiant (IV), (V) et (VI), un petit calcul montre que :

$$\{B', E\}\{E, A'\}\{B'', E\}\{E, A''\} = \{B'B'', E\}\{E, A_{B',B''}A'^{B''}A''\}.$$

Finalement, identifiant $\{E, A\}$ à A et posant $\{B, E\} = \bar{B}$, Schreier est en mesure d'énoncer la proposition :

Conditions de Schreier[16] **:** *La donnée de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et des relations $A\bar{B} = \bar{B}A^B$ et $\overline{B'}\,\overline{B''} = \overline{B'B''}A_{B',B''}$ définit une extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ si et seulement si les éléments A^B et $A_{B',B''}$ satisfont les conditions :*

$$(a) \qquad (A'A'')^B = A'^B A''^B \ (A^E = A),$$

$$(b) \qquad (A^{B'})^{B''} = A_{B',B''}^{-1}A^{B'B''}A_{B',B''},$$

$$(c) \qquad A_{B'B'',B'''}A_{B',B''}^{B'''} = A_{B',B''B'''}A_{B'',B'''} \ (A_{B,E} = A_{E,B} = E).$$

En outre toute extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ peut être définie par de telles relations.

[16] C'est par ce nom que nous référerons par la suite aux conditions énoncées par Schreier pour l'obtension d'une extension.

Trouver toutes les extensions $\overline{\mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ revient à trouver tous les systèmes d'éléments A^B et $A_{B',B''}$ solutions de (a), (b) et (c). Plutôt que de parler d'éléments A^B, on peut dire qu'à tout élément B de $\mathfrak{B}$ est associé un isomorphisme de $\mathfrak{A}$, envoyant un élément quelconque A de $\mathfrak{A}$ sur A^B. Schreier note cette application $\begin{pmatrix} A \\ A^B \end{pmatrix}$; le fait qu'il s'agit d'un morphisme est donné par (a). Il s'agit qui plus est d'un isomorphisme car $\begin{pmatrix} A \\ A^{B^{-1}} \end{pmatrix}$ est son inverse, comme on peut le vérifier à l'aide de (b) et de $A^E = A$.

L'application
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}) \\ & B & \mapsto & \begin{pmatrix} A \\ A^B \end{pmatrix} \end{array}$$
n'est pas un morphisme, du fait de (b), mais induit un anti-morphisme[17] de $\mathfrak{B}$ dans le groupe des "classes d'isomorphismes"[18] $\begin{pmatrix} A \\ A^{*^{-1}} A^B A^* \end{pmatrix}$, qui sont les classes d'automorphismes de $\mathfrak{A}$ modulo les automorphismes intérieurs.

Pour trouver toutes les solutions de (a), (b) et (c), on peut donc commencer par considérer tous les sous-groupes de $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$ anti-homomorphes à $\mathfrak{B}$[19]. Ce que fait Schreier par la suite consiste essentiellement à se don-

---

[17]On appelle "anti-morphisme" une application $\varphi : \; G \; \rightarrow \; H$ entre deux groupes G et H, telle que $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2)\varphi(g_1)$.

[18]"Isomorphismenklassen". Le groupe des classes d'automorphismes de $\mathfrak{A}$ modulo les automorphismes intérieurs est ce qu'on appelle le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathfrak{A}$, que l'on note $\mathrm{Ext}\,(\mathfrak{A})$.

[19]C'est ainsi que s'exprime Schreier : "Sollen also alle Lösungen von (a), (b), (c) aufgestellt werden, so haben wir zuerst alle mit $\mathfrak{B}$ isomorphen Gruppen von Isomorphismenklassen von $\mathfrak{A}$ aufzustellen." Le terme "isomorph" prête à confusion car il ne faut pas comprendre "isomorphe". En général, dans la littérature mathématique allemande de cette époque, il faut comprendre "isomorph" comme "homomorphe". Mais ici c'est même "anti-homomorphe" qu'il faut entendre. On peut néanmoins remarquer que considérer tous les sous-groupes anti-homomorphes ou homomorphes à $\mathfrak{B}$ est la même chose. On peut en effet déduire de ψ un morphisme de $\mathfrak{B}$ dans $\mathrm{Ext}\,(\mathfrak{A})$, par exemple
$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi} : & \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathrm{Ext}\,(\mathfrak{A}) \\ & B & \mapsto & (\mathrm{Classe}(\psi(B)))^{-1}. \end{array}$$
Les relations (a) et (b) définissent donc, au choix, un anti-morphisme ou un morphisme (c'est plutôt cette dernière possibilité qu'un point de vue moderne privilégierait) de $\mathfrak{B}$ dans le groupe $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$. Nous resterons néanmoins dans un premier temps fidèles à l'esprit de Schreier qui considère tous les sous-groupes de $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$ *anti*-homomorphes à $\mathfrak{B}$ (dans la suite du texte on se rend compte qu'il fait même un peu plus que cela en se donnant en fin de compte tous les anti-morphismes de $\mathfrak{B}$ dans $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$, leur image étant un sous-groupe de $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$). Mais par la suite le lecteur ne devra pas être surpris de nous voir parler de morphismes de $\mathfrak{B}$ dans $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$.

ner un anti-morphisme de $\mathfrak{B}$ dans Ext($\mathfrak{A}$) et à choisir, pour chaque élément B de $\mathfrak{B}$, un représentant $\begin{pmatrix} A \\ A^B \end{pmatrix}$ dans la classe image de B par cet anti-morphisme. Il réalise ce choix de manière totalement arbitraire, sauf pour E ; il choisit dans la classe image de E le représentant id, ce qui se traduit par : $A^E = A$. La composée $\begin{pmatrix} A \\ A^{B'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ A^{B''} \end{pmatrix}$ et l'isomorphisme $\begin{pmatrix} A \\ A^{B'B''} \end{pmatrix}$ sont dans la même classe ; ces deux isomorphismes ne diffèrent donc que d'un automorphisme intérieur de A. Ainsi il existe un élément $A^*_{B',B''}$ de $\mathfrak{A}$ tel que $\begin{pmatrix} A \\ A^{B'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ A^{B''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A^{B'B''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ A^{*-1}_{B',B''} A A^*_{B',B''} \end{pmatrix}$ ou, ce qui est équivalent, tel que $(A^{B'})^{B''} = A^{*-1}_{B',B''} A^{B'B''} A^*_{B',B''}$.

Il n'y a d'ailleurs pas forcément unicité d'un tel $A^*_{B',B''}$. Il n'y a unicité que si le centre de $\mathfrak{A}$ est trivial. Schreier choisit les $A^*_{B',B''}$ de telle manière que (et on peut vérifier que c'est licite) $A^*_{E,B} = A^*_{B,E} = E$. Tout système d'éléments $A_{B',B''}$, où $A_{B',B''} = A^*_{B',B''}\,\bar{A}_{B',B''}$, les $\bar{A}_{B',B''}$ décrivant la totalité des éléments du centre $Z(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$, vérifie également (b). Pour obtenir une extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$, il ne reste donc plus qu'à choisir les $\bar{A}_{B',B''}$ de telle sorte que les $A_{B',B''}$ vérifient (c). Comme $A^*_{E,B} = A^*_{B,E} = E$ et que l'on veut (d'après (c)) $A_{B,E} = A_{E,B} = E$, on doit imposer $\bar{A}_{B,E} = \bar{A}_{E,B} = E$. La condition ($c$) est alors remplie dans le cas particulier où B', B'' ou B''' est pris égal à E.

La condition (c) revient maintenant à demander que, si aucun des éléments B, B', B'' n'est égal à E, on ait[20] :

$$\bar{A}_{B'B'',B'''}\,\bar{A}^{B'''}_{B',B''}\,\bar{A}^{-1}_{B'',B'''}\,\bar{A}^{-1}_{B',B''B'''}\,A^*_{B'B'',B'''}A^{*B'''}_{B',B''}A^{*-1}_{B'',B'''}A^{*-1}_{B',B''B'''} = E.$$

Schreier remarque deux choses. Tout d'abord, la condition précédente exige que la quantité $A^*_{B'B'',B'''}A^{*B'''}_{B',B''}A^{*-1}_{B'',B'''}A^{*-1}_{B',B''B'''}$ soit un élément de $Z(\mathfrak{A})$. Ensuite, si on a un système $\bar{A}_{B',B''}$ fournissant une solution $A_{B',B''}$ de (c) (donc une extension), alors tout système de la forme $\bar{A}_{B',B''}\,\bar{\bar{A}}_{B',B''}$, où le système $(\bar{\bar{A}}_{B',B''})$ vérifie

$$(\mathcal{C}) \qquad \bar{\bar{A}}_{B'B'',B'''}\,\bar{\bar{A}}^{B'''}_{B',B''}\,\bar{\bar{A}}^{-1}_{B'',B'''}\,\bar{\bar{A}}^{-1}_{B',B''B'''} = E,$$

fournit également une extension, au sens où le système $(A_{B',B''} = A^*_{B',B''}\,\bar{A}_{B',B''}\,\bar{\bar{A}}_{B',B''})$ est solution de (c).

Malheureusement sa première remarque n'apporte rien car on peut montrer que $A^*_{B'B'',B'''}A^{*B'''}_{B',B''}A^{*-1}_{B'',B'''}A^{*-1}_{B',B''B'''}$ est toujours dans $Z(\mathfrak{A})$ (Schreier le

[20]Les $\bar{A}_{B',B''}$ commutent avec tout élément de $\mathfrak{A}$.

fait lui-même en prouvant que l'automorphisme intérieur qui lui est associé est l'identité). La seconde prouve que si l'on a un système $(A_{B',B''})$ fournissant une extension, on obtient toutes les extensions via les systèmes de la forme $(A_{B',B''}\overline{\overline{A}}_{B',B''})$ où $\overline{\overline{A}}_{B',B''}$ vérifie $(\mathcal{C})$. Schreier ne pousse pas son analyse plus avant, indiquant seulement qu'il semble difficile d'en dire plus sur le problème général des extensions et se consacrant donc par la suite à des cas particuliers. Il ne se prononce d'ailleurs pas sur l'éventuelle impossibilité de certaines extensions ; tout ce que l'on sait, c'est que s'il existe une extension associée à un anti-morphisme de $\mathfrak{B}$ dans $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$, l'ensemble des extensions associées à cet anti-morphisme est paramétré par l'ensemble des solutions de $(\mathcal{C})$.

4.1.3 Quelles relations avec le travail de Schur ?

Comme nous avons déjà vu apparaître le concept d'extension de groupes dans l'article [204] de Schur, antérieur d'une vingtaine d'années à celui de Schreier, on peut naturellement se demander ce que Schreier doit à Schur et ce qu'il fait de plus. Comme Schreier ne fait jamais mention des travaux de Schur sur les représentations projectives, l'hypothèse qu'il n'en avait pas connaissance doit être envisagée. Les deux hommes se sont-ils rencontrés ? Nous n'avons trouvé aucun élément permettant de répondre avec certitude à cette question, dans un sens comme dans l'autre, mais Schreier effectuait sa thèse à Vienne et ne s'en éloignait que pour assister à un séminaire à Marbourg, et Schur n'exerça ni à Vienne ni à Marbourg.

Même à supposer que Schreier connût les travaux de Schur sur les représentations projectives, il ressort clairement qu'ils ne furent pas une grande source d'inspiration pour son étude abstraite des extensions de groupes. Il est en effet impossible d'identifier clairement un point de ressemblance entre les approches de Schur et de Schreier, autant dans les notations et dans les appellations que dans les points qui semblent susciter particulièrement l'intérêt de l'un et de l'autre. Par exemple, Schreier parle d'une extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ là où Schur aurait parlé d'une extension de $\mathfrak{B}$ par $\mathfrak{A}$. Ou encore, concernant les systèmes ($r_{P,Q}$ chez Schur, $A_{B',B''}$ chez Schreier), Schur insiste sur le fait qu'ils apparaissent pour traduire une associativité et définit la notion de systèmes "associés" (l'association est, comme nous l'avons vu, une relation d'équivalence sur les systèmes de facteurs) alors que Schreier n'écrit jamais l'expression "assoziativ Gesetz" ni n'introduit de relation d'équivalence sur ses systèmes $(A_{B',B''})$.

Et au fond, serait-il si étonnant que Schreier ne connaisse pas les travaux de Schur sur les représentations projectives de groupes (et donc sur les extensions centrales) ? Probablement pas, et il n'est nul besoin d'invoquer pour justifier cette position le fait que la diffusion des connaissances et l'accès aux sources n'étaient pas du niveau actuel. Schur n'a tout simplement écrit que trois articles sur le sujet des représentations projectives ([204], [207] et [209]), ne traitant la notion d'extension de groupes que dans ces articles (sans donc lui consacrer une étude spécifique). En outre les représentations projectives ne semblent pas avoir fait école durant les années séparant les travaux de Schur de ceux de Schreier, ce qui indique qu'elles sont restées un sujet d'étude marginal.

La seule référence d'avant les années 1950 proposée par Mac Lane dans son livre *Homology* ([154] p. 137) concernant les représentations projectives est l'article [14] d'Asano et Shoda. Les auteurs de cet article, qui s'efforcent de prolonger les recherches de Hopf aux représentations projectives dans un corps quelconque, ne citent aucune source à part celles de Schur sur le sujet. Une recherche sur les moteurs de MathSciNet et Zentralblatt sur les occurrences "gebrochen*" & "darstellung*" et "kollineation*" & "darstellung*", ainsi que leurs équivalents en anglais, indique que les seules contributions antérieures à l'année 1940 sont celles de Schur puis l'article [97] de 1931 de Robert Frucht et enfin quelques contributions de mathématiciens japonais (Asano, Asano & Shoda, Tazawa) entre 1933 et 1935. Dans sa contribution, Fichte ne renvoie lui non plus à aucune autre référence que celles de Schur mais mentionne cependant que la question des représentations projectives des groupes abéliens a été à nouveau posée par Weyl en 1928[21] ; dans tous les cas, le sujet des représentations projectives n'a semble-t-il été relancé qu'après la thèse de Schreier. Enfin, en ce qui concerne les articles sur les extensions de groupes jusqu'au début des années 1940, aucun ne cite Schur alors que plusieurs de leurs idées se trouvent à l'origine dans son travail.

D'ailleurs, un exemple analogue confirme que l'idée selon laquelle Schreier ne connaissait pas le travail de Schur n'est pas infondée. Un des outils importants de la théorie du corps de classes est l'application dite "transfert" ("Verlagerung"). L'idée de cette application remonte à Schur, qui l'avait déjà étudiée en 1902 dans [203]. Mais d'Artin, Hasse et Schreier, qui redécouvrirent cette notion et les résultats de Schur à son sujet, aucun ne semblait connaître le travail initial de ce dernier[22].

Il semble donc n'y avoir aucun lien entre les études respectives de Schur et de Schreier des extensions de groupes. Nous pouvons néanmoins nous interroger sur les différences que comportent leurs approches et de plus, Schur ayant défini et étudié succinctement la notion d'extension centrale, nous devons

[21] Cf. [97] p. 17.
[22] Cf. [84] pp. 195-6.

pouvoir la retrouver comme cas particulier dans la codification de Schreier. Reprenons donc les réflexions de Schur et comparons-les à celles de Schreier.

Dans le deuxième paragraphe de [204], Schur avait introduit un groupe $\mathfrak{G}$, extension[23] centrale du groupe abélien $\mathfrak{A}$ par un groupe quelconque $\mathfrak{H}$. Schur ne s'intéressait qu'à un groupe $\mathfrak{H}$ fini et à des extensions $\mathfrak{G}$ finies mais on peut lever ces restrictions sans rien changer aux premiers pas de son étude. Mis à part le fait que Schur demandait que $\mathfrak{A}$ soit un sous-groupe *central* de $\mathfrak{G}$, la situation considérée est donc la même que la situation générale décrite par Schreier, $\mathfrak{H}$ jouant le rôle de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{G}$ celui de $\overline{\mathfrak{B}}$.

La relation $H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)}$ traduisait la loi de composition dans $\mathfrak{H}$. Les éléments H_λ et H_μ jouent le même rôle chez Schur que B' et B'' chez Schreier. Lorsque l'on considère des représentants G_λ, G_μ et $G_{\varphi(\lambda,\mu)}$ dans $\mathfrak{G}$ de H_λ, H_μ et $H_{\varphi(\lambda,\mu)}$, on obtient la relation $G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)}$, qui est la stricte analogue de la relation de Schreier $\overline{B'}\,\overline{B''} = \overline{B'B''} A_{B',B''}$, la "barre" surlignant les lettres indiquant qu'il s'agit d'un représentant dans l'extension. On peut cependant noter une différence entre ces deux relations ; chez Schur l'élément $A_{\lambda,\mu}$ multiplie par la gauche le représentant du produit alors que chez Schreier il le multiplie par la droite. L'ordre de composition de ces éléments est bien sûr indifférent dans le cadre de l'étude de Schur vu que $\mathfrak{A}$ y est supposé central mais il importe chez Schreier. Plus généralement, Schur a décidé de toujours écrire les éléments de $\mathfrak{G}$ sous la forme AG_λ alors que Schreier, lui, a opté pour une représentation de la forme $\bar{B}A$. Ce n'est certes qu'une question de choix mais ce choix a, comme nous allons le voir, des conséquences.

Le degré de généralité voulu par Schreier n'imposant pas que $\mathfrak{A}$ soit central, il n'y a pas forcément égalité entre $\bar{B}A$ et $A\bar{B}$. Lorsqu'on veut mettre $A\bar{B}$ sous la forme générique des éléments de $\overline{\mathfrak{B}}$, on procède comme suit : $A\bar{B} = \bar{B}\,\bar{B}^{-1}A\bar{B} = \bar{B}A^B$, où Schreier pose $A^B = \bar{B}^{-1}A\bar{B}$. Schreier aurait d'ailleurs pu faire de même en choisissant l'écriture générique des éléments de $\overline{\mathfrak{B}}$ comme étant "$A\bar{B}$". Dans ce cas, lorsqu'on cherche à mettre $\bar{B}A$ sous la forme générique, on écrit $\bar{B}A = \bar{B}A\bar{B}^{-1}\bar{B} = {}^B A\bar{B}$, avec ${}^B A = \bar{B}A\bar{B}^{-1}$.

Maintenant l'application ϕ (analogue de l'application ψ que nous avons introduite précédemment)

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathfrak{B} & \to & \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}) \\ & B & \mapsto & \begin{pmatrix} A \\ {}^B A \end{pmatrix} \end{array}$$

induit un véritable morphisme (et non pas un anti-morphisme comme l'in-

[23]Bien que nous parlions à nouveau de Schur, nous conservons la terminologie employée par Schreier (que, comme cela a été précisé plus haut, nous utilisons exclusivement dans la suite de cette thèse) stipulant que $\mathfrak{G}$ est une extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{H}$ si $\mathfrak{A}$ en est un sous-groupe distingué, et si $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ est isomorphe à $\mathfrak{H}$.

duisait ψ)

$$\begin{array}{rccc} \bar{\phi}: & \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathrm{Ext}\,(\mathfrak{A}) \\ & B & \mapsto & \mathrm{Classe}(\phi(B)). \end{array}$$

Le fait de récupérer un morphisme et non un anti-morphisme peut amener à privilégier cette présentation. Ce dernier morphisme est parfois appelé "action extérieure"[24] de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{A}$. Mais si l'on se satisfait du fait qu'un anti-morphisme est au fond fort peu différent d'un morphisme, la présentation de Schreier peut être privilégiée du fait de son aspect fonctionnel : en effet, modulo un automorphisme intérieur (ou en regardant les représentants dans $\mathrm{Ext}\,(\mathfrak{A})$), on a la relation $(A^B)^{B'} = A^{BB'}$, ce qui justifie cette notation exponentielle.

Si dans le cadre de l'étude de Schur on considère l'associativité dans $\mathfrak{G}$, en écrivant $(G_\lambda G_\mu)G_\nu = G_\lambda(G_\mu G_\nu)$, il en découlera la relation $A_{\lambda,\mu}A_{\varphi(\lambda,\mu),\nu} = A_{\mu,\nu}A_{\lambda,\varphi(\mu,\nu)}$[25]. Cette relation, traduisant l'associativité dans l'extension, doit bien entendu être analogue à la relation

$$A_{B'B'',B'''}A^{B'''}_{B',B''} = A_{B',B''B'''}A_{B'',B'''}. \tag{8}$$

Quelles sont donc les différences entre ces deux relations ? Elles sont au nombre de deux. D'une part l'ordre dans lequel sont composés les termes diffère entre ces deux relations, du fait du choix de l'écriture générique des éléments de l'extension. D'autre part, comme le cadre général de Schreier $\mathfrak{A}$ n'est pas supposé central, intervient l'anti-action extérieure de $\mathfrak{B}$ via le terme $A^{B'''}_{B',B''}$.

Ainsi l'étude spécifique de Schur (le cas d'une extension centrale) se retrouve aisément au sein de l'étude générale de Schreier. Nous avons voulu montrer cela afin de rendre totalement clair au lecteur le fait que Schur et Schreier traitent bien du même concept d'extension et, ainsi, de mettre en évidence la proximité de leurs travaux. Nous voulons aussi en profiter pour montrer que cette proximité rend étonnant le fait que Schreier ne soit pas allé plus loin dans son étude et, notamment, n'ait pas reproduit ni même mentionné l'étude de Schur (ce qui renforce encore l'idée que le travail de Schur devait lui être inconnu).

---

[24]Une action d'un groupe G sur un groupe G' peut être définie comme un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G')$. On parle pour $\bar{\phi}$ d'action "extérieure" car le but de $\bar{\phi}$ n'est pas $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A})$ mais $\mathrm{Ext}\,(\mathfrak{A})$.

[25]Cette relation n'apparaît certes pas dans le texte de Schur mais on y trouve par contre son analogue intervenant dans la construction du groupe de représentation (on se rappellera que les $J_{P,Q}$ y jouent le rôle des $A_{\lambda,\mu}$) :

$$J_{P,Q}J_{PQ,R} = J_{P,QR}J_{Q,R}, \;\; P, Q, R \in \mathfrak{H}. \tag{$B.$}$$

Nous anticipons un peu sur les développements futurs mais nous ferons remarquer notamment que Schreier n'introduit pas la relation d'"association" sur les systèmes $(A_{B',B''})$ qui aurait été l'analogue de la relation introduite par Schur sur les systèmes de nombres $(r_{P,Q})$. Il faut dire que pour que la relation d'association soit une relation d'équivalence, il faut supposer $\mathfrak{A}$ abélien. Certes Schreier n'a fait aucune hypothèse sur les groupes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ au cours de son étude abstraite mais il s'est néanmoins concentré sur les extensions d'un groupe abélien dans la deuxième partie de sa thèse ; en ayant eu connaissance du travail de Schur, peut-être aurait-il poussé plus loin son étude abstraite pour le cas où $\mathfrak{A}$ est abélien en reprenant certaines considérations de Schur.

Pour mettre en évidence la relation d'association, il suffisait de procéder comme suit. Si l'on choisit à la place des $\bar{B}$ d'autres représentants $\tilde{B}$ de la classe de $\bar{\mathfrak{B}}$ correspondant à B, $\bar{B}$ et $\tilde{B}$ ne diffèrent que d'un élément de $\mathfrak{A}$. Ainsi pour tout B dans $\mathfrak{B}$ existe-t-il un élément α_B de $\mathfrak{A}$ tel que $\tilde{B}\alpha_B = \bar{B}$. Si l'on reprend la relation $\overline{B'}\,\overline{B''} = \overline{B'B''}A_{B',B''}$, le membre de gauche nous conduit alors à $\overline{B'}\,\overline{B''} = \tilde{B}'\alpha_{B'}\tilde{B}''\alpha_{B''} = \tilde{B}'\tilde{B}''\alpha_{B'}^{B''}\alpha_{B''}$ et le membre de droite à $\overline{B'B''}A_{B',B''} = \widetilde{B'B''}\alpha_{B'B''}A_{B',B''}$. Les nouveaux représentants $\tilde{B}$ sont donc associés au système :

$$(\tilde{A}_{B',B''}) = (\alpha_{B'B''}A_{B',B''}\alpha_{B''}^{-1}(\alpha_{B'}^{B''})^{-1}) = (\alpha_{B'B''}\alpha_{B''}^{-1}(\alpha_{B'}^{B''})^{-1}A_{B',B''}),$$

la dernière égalité étant rendue licite parce qu'on suppose $\mathfrak{A}$ abélien. Il serait naturel de stipuler que les systèmes $(A_{B',B''})$ et $(\tilde{A}_{B',B''})$ sont "associés", étant donnés qu'ils correspondent à la même extension, la différence se faisant juste dans le choix des représentants des classes en correspondance avec $\mathfrak{B}$. Cette relation d'équivalence est une généralisation immédiate de la relation introduite par Schur, au cas où l'extension n'est pas forcément centrale mais où $\mathfrak{A}$ est abélien. Sans que nous poursuivions pour l'instant dans cette voie, le lecteur peut d'ores et déjà imaginer une généralisation du multiplicateur de Schur où les nombres complexes constituant les systèmes de facteurs seraient remplacés par les éléments d'un groupe arbitraire.

4.1.4 Quelles avancées ?

Finalement l'étude de Schreier ne fait pas avancer spectaculairement le sujet des extensions de groupes – même si un oeil moderne peut y déceler beaucoup – au sens il n'y a pas de résultat nouveau concernant le problème général, notamment sur l'éventuelle impossibilité de certaines extensions. On peut déplorer de plus le fait que le travail originel de Schur semble s'être perdu entre temps. Pour autant Schreier a le mérite d'aborder le problème d'un point de vue général et abstrait, alors même que son but réel était très concret, et de faire un premier travail de défrichement, en soulignant l'existence nécessaire de certaines quantités ($A_{B,B'}$ et A^B) et identifiant les relations qu'elles doivent satisfaire, et en mettant en lumière le fait qu'une extension est toujours associée à un (anti-)morphisme de $\mathfrak{B}$ dans Ext ($\mathfrak{A}$). Il a également renouvelé l'intérêt pour les extensions de groupes, en en donnant des applications utiles dans les paragraphes qui suivent l'étude abstraite, et inspiré des travaux ultérieurs remarquables, comme celui de Reinhold Baer [16] que nous étudierons par la suite.

Comme Schreier traite plusieurs exemples, son travail a également le mérite d'indiquer des méthodes de détermination d'extensions. Il s'intéresse par exemple à des extensions par un produit direct de groupes et à des extensions de groupes abéliens. Il s'efforce aussi, dans une portion importante de la deuxième partie, de construire des p-groupes (se limitant aux ordres p^3, p^4 et p^5). Ces groupes peuvent en effet s'obtenir comme extensions (éventuellement successives) de p-groupes d'ordres inférieurs. De ces exemples ressortent deux grandes idées. D'une part, comme une extension est accompagnée d'un morphisme de $\mathfrak{B}$ dans Aut($\mathfrak{A}$), on peut tenter de mettre à profit la structure de Aut($\mathfrak{A}$), et notamment de déterminer ses sous-groupes (car ce sont les images potentielles de $\mathfrak{B}$). Mais Schreier remarque également que l'on peut mettre à profit l'éventuelle connaissance d'une présentation de $\mathfrak{B}$ par générateurs et relations, car les relations définissant $\mathfrak{B}$ vont induire un système d'équations qui doit être vérifié par certains éléments de l'extension. Comme nous l'avons mentionné plus haut, on trouve néanmoins déjà cette idée dans le travail de Schur.

4.2 Le développement de la théorie des extensions de groupes dans les années 1930

4.2.1 Reinhold Baer

Reinhold Baer[26] était un mathématicien né à Berlin en 1902 (il décéda à Zürich en 1979) qui, après avoir effectué une thèse à Göttingen (où il côtoya, entre autres, Emmy Noether) sur la classification des courbes sur une surface, s'investit de plus en plus en algèbre de par sa proximité avec Alfred Loewy, dont il fut l'assistant à Fribourg de 1926 à 1928, et Wolfgang Krull, algébriste renommé et grand contributeur à la théorie des anneaux.

Baer obtint un poste à Halle en 1928 qu'il dut quitter en 1933 avec la formation du Troisième Reich. Fuyant l'Allemagne, il se déplaça à plusieurs

[26] Cf. [135].

reprises entre 1933 et 1938, passant deux ans à Manchester puis deux ans à Princeton et un an à l'Université de Caroline du Nord avant d'enfin s'établir à Urbana, Ill., étant recruté comme "Assistant Professor" à l'Université de l'Illinois.

Reinhold Baer était un spécialiste de théorie des groupes, notamment des groupes abéliens. Un compte-rendu de ses travaux dans ce domaine est disponible dans un des *Lecture Notes in Mathematics* [98]. Ses premiers résultats sur les groupes abéliens parurent en 1934 alors qu'il se trouvait à Manchester. Le problème des extensions de groupes n'est pas très éloigné de questions importantes sur les groupes abéliens comme celles de la décomposabilité[27]. Baer considéra le problème de l'extension dès le début de sa carrière, alors qu'il était à Manchester, et y revint plus tard dans [17].

4.2.2 L'approche de Baer et ses successeurs

Le travail de Schreier a montré clairement que sans hypothèse sur les groupes impliqués dans l'extension, le problème est trop général et trop ardu pour être traité convenablement.

Si des résultats concernant l'extension d'un groupe par un autre ont pu, à partir de la fin des années 1920, apparaître en lien avec des questions provenant de la théorie algébrique des nombres[28], aucune étude abstraite des extensions de groupes ne vit le jour entre celle de Schreier et celle de Reinhold Baer en 1934 [16].

Otto Schreier avait analysé le problème des extensions en ces termes :

La donnée de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et des relations $A\bar{B} = \bar{B}A^B$ et $\overline{B'}\,\overline{B''} = \overline{B'B''}A_{B',B''}$ définit une extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ si et seulement si les éléments A^B et $A_{B',B''}$ satisfont les conditions :

(*a*) $$(A'A'')^B = A'^B A''^B \ (A^E = A),$$

(*b*) $$(A^{B'})^{B''} = A^{-1}_{B',B''} A^{B'B''} A_{B',B''},$$

(*c*) $$A_{B'B'',B'''} A^{B'''}_{B',B''} = A_{B',B''B'''} A_{B'',B'''} \ (A_{B,E} = A_{E,B} = E).$$

En outre toute extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ peut être définie par de telles relations.

[27]Un groupe est dit décomposable s'il peut s'écrire comme le produit direct de deux de ses sous-groupes distingués.

[28]Comme par exemple dans [197] où ce lien est très clair. La preuve du résultat qui y est obtenu sur les extensions de groupes passe d'ailleurs par les extensions de corps.

Il n'avait pu aller bien plus loin dans l'analyse générale de l'existence d'une extension et des critères la déterminant. Cependant il avait dégagé deux traits intéressants. D'une part les relations (a) et (b) induisent l'existence d'un morphisme de $\mathfrak{B}$ dans Ext($\mathfrak{A}$). D'autre part si les systèmes (A^B) et $(A_{B',B''})$ fournissent une extension, on obtient toutes les extensions associées à (A^B) via les systèmes de la forme $(A_{B',B''}\overline{\overline{A}}_{B',B''})$ où $\overline{\overline{A}}_{B',B''}$ vérifie

$$\overline{\overline{A}}_{B'B'',B'''}\overline{\overline{A}}^{B'''}_{B',B''}\overline{\overline{A}}^{-1}_{B'',B'''}\overline{\overline{A}}^{-1}_{B',B''B'''} = E.$$

Dans les exemples qu'il abordait, Schreier était principalement intéressé par le cas où $\mathfrak{B}$ était soumis à des conditions. Mais, ce qu'il ne s'était d'ailleurs pas interdit, on peut aussi faire des suppositions sur $\mathfrak{A}$. Ce qui a cependant échappé à Schreier, c'est qu'on peut faire des hypothèses sur $\mathfrak{A}$ même dans le cadre d'un traitement général du problème des extensions. Or, on voit tout l'avantage qu'il peut y avoir à supposer par exemple $\mathfrak{A}$ abélien, la relation (b) devenant $(A^{B'})^{B''} = A^{B'B''}$. Toute extension de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ sera alors accompagnée d'un morphisme $\mathfrak{B} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ et non plus seulement d'un morphisme $\mathfrak{B} \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$.

Baer réalise une synthèse pertinente de ces idées explicitement présentes chez Schreier ou qui découlent immédiatement de ses considérations. Baer décrit la situation ainsi : étant donnée une extension $\mathfrak{G}$ d'un groupe quelconque $\mathfrak{N}$ par un groupe quelconque C[29], les éléments de $\mathfrak{G}$ induisent par conjugaison des automorphismes de $\mathfrak{N}$ tandis que les classes de $\mathfrak{G}$ modulo $\mathfrak{N}$ en correspondance avec C induisent des automorphismes extérieurs de $\mathfrak{N}$. Plus précisément, on a des morphismes $\mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ et $C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$. Baer nomme de tels morphismes respectivement "caractères" et "caractères collectifs"[30].

Le problème de l'extension peut être présenté et traité de plusieurs façons. Baer le pose en les termes suivants[31]. Si C et $\mathfrak{N}$ sont donnés et si l'on a un morphisme $C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$, on peut essayer de traduire le fait que ce morphisme est induit par un morphisme $\mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$, où $\mathfrak{G}$ est une extension de $\mathfrak{N}$ par C. Ceci conduit Baer à introduire la définition :

Soit donné le morphisme $X : C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$. On dit d'un morphisme $\chi : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ qu'il est un relèvement[32] de X s'il existe un morphisme

[29] Situation que l'on décrirait par la suite exacte : $1 \to \mathfrak{N} \to \mathfrak{G} \to C \to 1$.

[30] Cf. [16] p. 377 : "Charakter" et "Kollektivcharakter". Pour ne pas alourdir le propos d'une terminologie quelque peu superflue, nous parlerons de morphismes, en précisant leur source et leur but, et non de "caractères" et de "caractères collectifs" comme le fait systématiquement Baer.

[31] On pourra comparer avec l'approche d'Eilenberg et Mac Lane, cf. 9.5

[32] Baer parle d'"Auflösung", que l'on pourrait traduire par "résolution". Ce terme est désuet et il nous semble préférable de le rendre par "relèvement".

$\eta : G \to C$ tel que :

1. pour tout $g \in G$, $\chi(g) \in X(\eta(g))$;
2. pour tout $c \in C$, pour tout $\alpha \in X(c)$, il existe un unique $g \in G$ tel que $\eta(g) = c$ et $\chi(g) = \alpha$.

La première condition revient à supposer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{N}) \arrow[d] \\ C \arrow[r, "X"'] & \mathrm{Ext}(\mathfrak{N}). \end{tikzcd}$$

La seconde condition impose entre autres la surjectivité de η. Mais pour être bien comprise, elle doit être remise dans le contexte où G se trouve bien être une extension d'un certain groupe $\mathfrak{N}'$ par C. Elle traduit alors le fait que tout élément de $X(c)$ est égal à l'automorphisme résultant de la conjugaison par un unique élément $\bar{c}$ de la classe de G modulo $\mathfrak{N}'$ en correspondance avec C. Cette situation ne se présente pas dans toutes les extensions ! En effet $\bar{c}$ n'est défini qu'à un élément du centre de $\mathfrak{N}'$ près.

Le relèvement de X en χ ne reflète donc pas ce qui se produit de manière générale dans les extensions. Mais Baer apporte des précisions qui rendent ce concept de relèvement exploitable.

Tout morphisme $\chi : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ ne peut pas être obtenu comme relèvement. Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que G admette un sous-groupe distingué N tel que χ induise un isomorphisme de N sur $\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$. Par exemple, si X et son relèvement χ sont donnés, le groupe $N = \mathrm{Ker}(\eta)$ convient. On voit ainsi que le relèvement traduit l'existence d'une extension ; G apparaît en effet alors comme extension de N par C. Mais cette observation ne s'applique pas directement au problème de l'extension de $\mathfrak{N}$ par C, à part si le centre $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{N}$ est trivial. En effet, on a $N \simeq \mathrm{Int}(\mathfrak{N}) \simeq \mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ et tout morphisme $X : C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$ en induit un $C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N}/\mathfrak{Z})$.

Mais avant de s'intéresser à l'extension déterminée par un relèvement, il faut étudier si, étant donné $X : C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$, il existe un relèvement. Baer montre que c'est bien le cas et qu'il y a même unicité modulo "isomorphisme"[33] de relèvements. Pour ce faire, il propose une construction générale d'un relèvement. Il considère le groupe

$$P = \{(a, \alpha),\ a \in C,\ \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{N}) \text{ se projette sur } X(a) \text{ dans } \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})\},$$

[33] Pour notre propos, il n'est pas utile de détailler cette notion qui diffère de la notion classique d'isomorphisme. Le lecteur pourra consulter [16] p. 378.

muni de la composition $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha\beta)$, et définit le morphisme π par $\pi(a, \alpha) = \alpha$. Le morphisme $\pi : P \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ est alors bien un relèvement de $X : C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$ associé à la projection $\rho : P \to C$ définie par $\rho(a, \alpha) = a$.

Le noyau de ρ est l'ensemble des $(1, \alpha)$, où α décrit $\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$. Il est donc isomorphe à $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ et le groupe P construit est une extension de $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ par C. Baer répond donc au problème de l'extension d'un groupe $\mathfrak{N}$ dont le centre $\mathfrak{Z}$ est trivial. Il obtient l'existence et l'unicité à "isomorphisme" près de l'extension d'un tel groupe $\mathfrak{N}$ par C réalisant le morphisme $X : C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$ donné, et sait construire cette extension (il s'agit de P).

Ce n'est pas le seul enseignement offert par la considération du groupe P. En effet, s'il existe une extension $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{N}$ par C réalisant $X : C \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{N})$, et si l'on désigne par ϕ la projection $\mathfrak{G} \to C$, alors le morphisme γ de $\mathfrak{G}$ dans P, défini par $\gamma(\mathfrak{g}) = (\phi(\mathfrak{g}), i_{\mathfrak{g}})$ (où $i_{\mathfrak{g}}$ est l'automorphisme obtenu par conjugaison par l'élément $\mathfrak{g}$) est surjectif, de noyau $\mathfrak{Z}$. Le groupe $\mathfrak{G}$ est donc également une extension de $\mathfrak{Z}$ par P et la classe de $\mathfrak{G}$ correspondant à l'élément (a, α) de P induit l'automorphisme extérieur α de $\mathfrak{N}$.

Ainsi le problème de l'extension des groupes se réduit-il à celui de l'extension des groupes abéliens vu que l'extension d'un groupe donné est ramenée à l'extension de son centre.

Lorsqu'on veut décrire la structure d'une extension, il est question de choix. Si l'on ne suppose pas $\mathfrak{N}$ abélien, $X(c)$ désigne une classe. On peut donc opérer un choix de représentant pour chacune des classes $X(c)$. Si l'on note ces représentants $x(c)$, on peut voir que $x(c)x(d)x(cd)^{-1}$ est un automorphisme intérieur de $\mathfrak{N}$ (car se trouvant dans la classe neutre), c'est-à-dire un $i_{n(c,d)}$ pour un certain $n(c, d)$ dans $\mathfrak{N}$. Mais cet élément $n(c, d)$ n'est lui non plus défini que modulo un élément du centre de $\mathfrak{N}$, donc se donner un $n(c, d)$ c'est encore faire un choix.

Si l'on suppose $\mathfrak{N}$ abélien, il n'y a pas à effectuer les choix indiqués ci-dessus car on a un morphisme $C \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$, dont le but n'est pas composé de classes. Ayant montré que l'on pouvait se restreindre à l'étude des extensions des groupes abéliens, Baer se contente donc logiquement de l'étude de ce cas, la structure des extensions potentielles impliquant moins d'ambiguïtés.

Les données sont donc un groupe abélien $\mathfrak{A}$ et un morphisme χ d'un certain groupe G dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Est à trouver un groupe $\mathfrak{G}$ dont $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe distingué, tel que $\mathfrak{G}/\mathfrak{A} \simeq G$ et tel que pour tout g dans G, les éléments de la classe de $\mathfrak{G}$ correspondant à g induisent par conjugaison l'automorphisme χ_g.

Si l'ambiguïté inhérente à l'extension semble moins importante dans le cas de l'extension d'un groupe abélien, elle n'en est cependant pas absente. Tout le problème vient de l'isomorphisme $p : \mathfrak{G}/\mathfrak{A} \to G$ qui implique que si l'on veut choisir un élément de $\mathfrak{G}$ dont l'image par p est un élément précis de G, alors on doit effectuer un choix modulo $\mathfrak{A}$.

Baer présente deux façons d'aborder l'ambiguïté dans l'extension d'un groupe abélien. On peut par exemple la traduire par les systèmes de facteurs. Ceux-ci apparaissent lorsqu'on choisit des représentants $r(g)$, $r(h)$ et $r(gh)$ respectivement dans $p^{-1}(g)$, $p^{-1}(h)$ et $p^{-1}(gh)$. Comme $r(g)r(h)r(gh)^{-1}$ est dans le noyau de p, il existe un élément $\alpha_{g,h}$ de $\mathfrak{A}$ tel que $r(g)r(h) = \alpha_{g,h}r(gh)$. L'ensemble des $\alpha_{g,h}$ forme ce qu'on appelle un système de facteurs et l'associativité dans $\mathfrak{G}$ implique qu'ils satisfont à certaines relations[34].

Mais Baer propose également une méthode alternative, inspirée des exemples concrets traités par Schreier. Cette méthode évite la considération des systèmes de facteurs en se donnant une présentation de G par générateurs et relations. Elle consiste essentiellement à dire que les relations définissant G induisent des relations qui doivent être vérifiées au sein de $\mathfrak{G}$, et même plus précisément au sein de $\mathfrak{A}$.

Voici comment Baer met en évidence ce phénomène. Soit $\{e_\nu\}$ un ensemble de générateurs de G. Quitte à ajouter des éléments et à renommer les e_ν, on peut supposer que l'inverse de tout e_ν est également un élément $e_{\rho(\nu)}$ et que $e_0 = 1$. Si une extension $\mathfrak{G}$ est donnée, on peut choisir dans $\mathfrak{G}$ des éléments $\mathfrak{e}_\nu$ tels que $p(\mathfrak{e}_\nu) = e_\nu$. Baer impose juste $\mathfrak{e}_0 = 1$. Les éléments de G étant engendrés par $\{e_\nu\}$, on peut les considérer comme des "mots" en les e_ν, c'est-à-dire des quantités de la forme $e_{\nu_1}...e_{\nu_n}$. Baer introduit alors la fonction de mots $\mathfrak{w}$, définie par $\mathfrak{w}(\prod_{i=1}^n e_{\nu_i}) = \prod_{i=1}^n \mathfrak{e}_{\nu_i}$. Cette fonction est multiplicative, c'est-à-dire que si a et b sont deux mots en les e_ν, $\mathfrak{w}(ab) = \mathfrak{w}(a)\mathfrak{w}(b)$. De plus les conditions imposées sur $\{e_\nu\}$ font que $\mathfrak{w}$ vérifie également la relation $\mathfrak{w}(a^{-1}) = \mathfrak{w}(a)^{-1}$; une telle fonction est dite "normée" ("normiert").

Si maintenant un mot r vaut 1, c'est qu'il appartient au système de relations R définissant le groupe G. Comme $p(\mathfrak{w}(r)) = 1$, $\mathfrak{w}(r)$ est un élément de $\mathfrak{A}$. Si l'on définit la fonction de mots $\mathfrak{a}$ qui, pour tout élément r de R, vaut $\mathfrak{a}(r) = \mathfrak{w}(r)$, alors Baer est capable de caractériser l'existence d'une extension à l'aide de cette fonction[35] :

Une fonction de mots $\mathfrak{a}$, multiplicative et normée, est réalisée par une extension de $\mathfrak{A}$ par G induisant l'action χ si et seulement si, pour tout mot b valant 1 et pour tout ν,

$$\mathfrak{a}(e_\nu b e_\nu^{-1}) = \chi_{e_\nu}(\mathfrak{a}(b)).$$

Ceci donne un critère pratique pour statuer sur l'existence d'extensions et sur la structure de celles-ci. Il faut vérifier qu'un ensemble de relations impliquant

[34] Relations que nous avons déjà vues dans les travaux de Schur et de Schreier.

[35] Cf. [16], Satz 1b) p. 385.

les conjuguées $e_\nu b e_\nu^{-1}$ des relations définissant G, peut être vérifié par une fonction multiplicative et normée $\mathfrak{a}$. Si l'on connaît une présentation simple de G par générateurs et relations, il apparaît ainsi tout à fait possible de résoudre le problème de l'extension. Baer applique d'ailleurs ce principe avec succès à la recherche d'extensions d'un groupe abélien par un groupe cyclique fini[36], par un produit direct de groupes, par un groupe abélien de génération fini (vu comme un produit direct de groupes cycliques), etc. A aucun moment Baer ne se sert de relations sur les systèmes de facteurs.

La méthode de Baer a été reprise plus tard par Alan Turing et Saunders Mac Lane notamment. Nous ne connaissons pas la méthode exacte utilisée par Mac Lane pour le calcul des extensions de $\mathbb{Z}$ par du dual du solénoïde (cf. 9.2.1) mais elle est inspirée de celle de Baer car elle utilise la présentation du groupe G par générateurs et relations. Alan Turing lui, prolongea dans [222] l'étude menée par Baer en la reformulant quelque peu[37] et en montrant que le critère de Baer s'adapte très bien au cas d'une extension d'un groupe non abélien[38]. Il s'efforça également d'améliorer l'efficacité du critère de Baer en simplifiant la description de $\mathfrak{R}$.

Le problème de la détermination d'un morphisme $\mathfrak{a}$ satisfaisant à la condition de Baer est équivalent à celui de la détermination d'un système de facteurs, c'est-à-dire de quantités satisfaisant des relations induites par l'associativité au sein de l'extension. Baer a bien montré que ces deux approches étaient équivalentes mais s'est concentré uniquement sur la première, préférant les vertus multiplicatives des fonctions de mots aux systèmes de facteurs, qui codent le fait que la multiplication dans le groupe à étendre ne se relève pas fidèlement dans l'extension.

D'ailleurs Marshall Hall, dans un article de 1938 [100], reprit une bonne partie des ingrédients de Baer mais en attaquant le problème à l'aide des

[36] Dans ce cas, G est engendré par un élément z d'ordre fini n. Baer pose $e_0 = 1$, $e_1 = z$, $e_2 = z^{-1}$. Les relations définissant G sont de la forme $e_1^{ln} = 1$ où l décrit $\mathbb{Z}$. La fonction multiplicative $\mathfrak{a}$ à trouver sera uniquement déterminée par sa valeur $\mathfrak{a}(z^n) = \mathfrak{c}$. Lorsqu'on met en œuvre le critère de Baer, il est facile de voir que $\mathfrak{a}$ définira une extension si et seulement si $\mathfrak{c}$ est invariant par χ_z.

[37] On aura pu remarquer que Baer adopte une présentation légèrement alambiquée en faisant intervenir les fonctions de mots multiplicatives normées. Si l'on considère le groupe libre $\mathfrak{F}$ engendré par les e_ν et si l'on note $\mathfrak{R}$ le noyau de la projection de $\mathfrak{F}$ sur G, il apparaît que $\mathfrak{R}$ est engendré précisément par les conjugués des relations $e_\nu b e_\nu^{-1}$ intervenant dans le critère de Baer. Ce critère se reformule donc non plus en les termes d'une fonction multiplicative normée $\mathfrak{a}$ mais en les termes d'un morphisme $\mathfrak{a} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{A}$.

[38] Dans le cas d'une extension d'un groupe non abélien, seulement $X : \mathfrak{F}/\mathfrak{R} \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$ est donné (on écrit $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ pour G, les deux groupes étant isomorphes). Si $\chi : \mathfrak{F} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ désigne un relèvement de X, il existe une extension induisant X si et seulement s'il existe un morphisme $\mathfrak{a} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{A}$ vérifiant la condition de Baer et la condition supplémentaire (triviale si $\mathfrak{A}$ est abélien) $\chi_r(a) = \mathfrak{a}(r)^{-1} a \mathfrak{a}(r)$ pour tout r dans $\mathfrak{R}$ et tout a dans $\mathfrak{A}$.

systèmes de facteurs. Cet article fut rédigé à l'*Institute for Advanced Study* de Princeton, où Baer travailla de 1935 à 1937, et fut soumis en mai 1937. Sans doute Hall a-t-il été influencé par l'approche de Baer du problème de l'extension ; il fait notamment référence[39] à une série de cours dispensés par ce dernier à Princeton.

Dans cet article, Hall se restreint à la recherche des extensions G d'un groupe A par un groupe H pour lesquelles les facteurs prennent leurs valeurs dans le centre B de A[40]. Avec cette hypothèse, si l'on reprend les conditions de Schreier, on verra que la relation (b) est simplifiée, de sorte que l'on obtient un morphisme de H dans $\mathrm{Aut}(A)$, comme dans le cas abélien. Si l'on fixe un morphisme $\chi : H \to \mathrm{Aut}(A)$, et si l'on écrit a^u pour $\chi_u(a)$, où u est dans H et a dans A, le problème de Hall consiste donc à déterminer tous les systèmes de facteurs à valeurs dans B vérifiant :

$$(uv, w)(u, v)^w = (u, vw)(v, w),\ \ u, v, w \in H.$$

De même que Baer, Hall utilise de manière cruciale le fait de connaître une présentation de H par générateurs et relations. L'idée est essentiellement la même ; les relations définissant H doivent avoir leurs pendants dans A. La différence est que Hall les réécrit à l'aide des (u, v).

Via χ, tout élément de H se voit associer un automorphisme de A, qui induit un automorphisme de B. Si α désigne un élément de B, u désigne un élément de H et n un entier quelconque, on a $(\alpha^n)^u = (\alpha^u)^n$ que l'on peut noter α^{nu}. Comme en outre $\alpha^{ru}\alpha^{sv} = \alpha^{ru+sv}$, on voit qu'on peut définir α^h pour tout élément h de l'anneau $\mathbb{Z}[H]$. L'anneau $\mathbb{Z}[H]$ du groupe H apparaît ainsi comme un anneau d'opérateurs.

Si x, y, z,... désignent des générateurs de H, on choisit des représentants $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$,... dans G des classes modulo A en correspondance avec les éléments de H. On introduit également le groupe libre F en les symboles $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$,..., que l'on munit d'un morphisme $F \to G$ envoyant $\mathbf{x}$ sur $\bar{x}$, $\mathbf{y}$ sur $\bar{y}$, etc. Si l'on compose ce morphisme avec la projection $G \to H$, on obtient un morphisme $F \to H$ envoyant $\mathbf{x}$ sur x, $\mathbf{y}$ sur y, etc.

Si H est défini par des relations $\Phi_i(x, y, z, ...) = 1$, $1 \leq i \leq r$, un résultat que l'on trouve notamment dans l'ouvrage [190] de Reidemeister permet de voir que les mots de F envoyés sur le 1 de H forment le plus petit sous-groupe conjugué R de F contenant les $\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, ...)$.

[39] Cf. la note de bas de page de [100] p. 228.

[40] Hall désigne ces extensions par l'expression "extensions centrales". Nous ne reproduisons cependant pas cette terminologie car elle est en conflit avec celle que nous utilisons ailleurs dans ce mémoire, qui est celle communément adoptée à l'heure actuelle, et stipule qu'une extension est "centrale" si A est contenu dans le centre de G.

Or tout facteur $(u,v) = (\overline{uv})^{-1}\bar{u}\bar{v}$ est envoyé sur le 1 de H, donc le mot lui correspondant dans F est dans R. Un résultat de Schreier sur les sous-groupes d'un groupe libre[41] montre que ces mots engendrent R. Comme les (u,v) sont, par hypothèse, tous dans B, on voit ainsi que les $\Phi_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z},...)$ définissent des éléments de B. Ces quantités $\alpha_i = \Phi_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z},...)$ déterminent d'ailleurs les valeurs de tous les facteurs.

Cette approche permet à Hall d'établir le théorème suivant[42] :

Une condition nécessaire et suffisante pour que les relations $\Phi_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z},...) = \alpha_i \in B$, $1 \leq i \leq r$, définissent une extension de A par H, est que $\prod_i \alpha_i^{h_i} = 1$ dès lors que $\prod_i \Phi_i^{h_i} = 1$.

Via ce théorème, l'étude se concentre sur les vecteurs de coordonnées $[h_1,...,h_r]$ pour lesquels $\prod_i \Phi_i^{h_i} = 1$. Hall montre que l'ensemble de ces vecteurs forme un $\mathbb{Z}[H]$-module et il ramène ainsi le problème à des considérations sur $\mathbb{Z}[H]$ et les $\mathbb{Z}[H]$-modules.

4.2.3 Le groupe des extensions

Dans les quelques contributions à la théorie des extensions de groupes que comptent les années 1930, l'idée de base est donc toujours la même : exploiter les relations induites dans A par les relations définissant le groupe H. Baer préférait en passer par les morphismes $H \to$ A après une réduction au cas abélien. Turing a montré que la démarche de Baer était aussi bien applicable sans se ramener au cas abélien. Hall préférait lui étudier les systèmes de facteurs. Si plusieurs résultats concrets ont été établis et les méthodes affinées, il n'y a aucune grande nouveauté conceptuelle. Les conditions de Schreier constituent la base de l'attaque du problème et le point clé de la détermination des extensions, à savoir l'utilisation d'une présentation par générateurs et relations du groupe à étendre, est une idée déjà présente chez Schur dans sa construction des groupes de représentation.

On pourra se rappeler que Schur avait également défini un groupe, dit "multiplicateur de Schur", dont les éléments sont les classes de systèmes de facteurs. On le retrouve, sous une forme plus générale, dans les considérations de Baer et de Hall. Ils ne semblent cependant pas avoir repris ce concept directement de Schur mais plutôt du travail de Brauer sur les représentations[43].

Il y a deux façons de définir le groupe de Brauer. La première consiste à le considérer du point de vue des systèmes de facteurs, la seconde du point

[41] Cf. [201] p. 173.
[42] Cf. [100] p. 224.
[43] Cf. notamment [23].

de vue des algèbres à division. Dans le cadre des extensions de groupes, c'est cette dernière façon qu'adopte Baer, en introduisant un groupe des extensions analogue au groupe des algèbres à division de Brauer.

La première étape dans la construction de ce groupe consiste à définir un produit sur les extensions de groupes. Mais on ne peut composer entre elles que des extensions d'un même groupe abélien $\mathfrak{A}$ par un même groupe C réalisant le même morphisme $\chi : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Si $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ sont deux telles extensions et si l'on note ρ_i les isomorphismes respectifs $G \to \mathfrak{G}_i/\mathfrak{A}$, alors le produit $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ est défini comme l'ensemble des couples $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$, où les $\mathfrak{g}_i$ sont dans $\mathfrak{G}_i$ et vérifient $\rho_1^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{g}_1) = \rho_2^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{g}_2)$, soumis aux conditions :

– $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ si et seulement si $\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1^{-1} = \mathfrak{g}_2\mathfrak{h}_2^{-1}$;
– $(\mathfrak{a}, 1) = (1, \mathfrak{a})$ pour tout $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ est muni d'un produit noté $\circ$ défini par $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)\circ(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = (\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_2\mathfrak{h}_2)$.

Baer introduit aussi une relation d'équivalence sur les extensions (à vrai dire également définie dans le cadre des extensions d'un groupe non abélien), le "type" ; deux extensions $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ sont du même type lorsqu'il existe un isomorphisme entre $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ valant l'identité sur $\mathfrak{N}$ et C.

Ce que prouve Baer, c'est que l'ensemble T des types d'extensions, muni du produit induit par le produit $\otimes$, est un groupe abélien. En outre, les types d'extensions étant déterminés par la donnée d'un morphisme $\mathfrak{a}$ ou des systèmes de facteurs, on peut montrer qu'en associant à un morphisme $\mathfrak{a}$ le type d'extension qu'il détermine, de même qu'en associant à un système de facteurs le type d'extensions qu'il détermine, on définit ainsi des morphismes surjectifs d'image T.

Hall introduit lui un groupe des classes de systèmes de facteurs. Il est défini en prenant l'ensemble des systèmes de facteurs à association près, muni de la multiplication terme à terme des facteurs[44]. On pourra se convaincre qu'en associant à toute classe d'extensions la classe de systèmes de facteurs qu'elle détermine, on obtient un isomorphisme entre le groupe de Hall et celui de Baer. Hall introduit ce concept en vue d'un résultat concret. Reprenant une idée[45] de Tadasi Nakayama, introduite dans le cadre de la théorie du

[44]C'est exactement la même définition que celle de Schur pour le multiplicateur, si ce n'est que Schur étant dans un cas particulier où H était fini et $A = \mathbb{C}^*$. La définition générale de ce groupe des systèmes de facteurs remonte à Brauer, dans [23], §3. Brauer l'avait introduite dans le cadre des représentations de groupes et établi que le groupe des classes de systèmes de facteurs est isomorphe au groupe dit de Brauer, dont le groupe des extensions considéré par Baer est le pendant.

[45]C'est le fait de considérer la fonction $f(v) = \prod_{v \in H} (u, v)$. Nakayama avait associé cette fonction dans [169] à une extension galoisienne séparable ; elle est invariante en la classe du système de facteurs.

corps de classes dans laquelle, à partir de la fin des années 1920, les systèmes de facteurs étaient très utilisés, il prouve[46] que si H est fini alors l'ordre de tout élément du groupe des extensions divise l'ordre de H et le plus petit commun multiple des ordres des éléments de B.

Le développement de la théorie des extensions de groupes jusqu'au début des années 1940 peut à peu près être résumé à ce que nous venons d'en dire dans ce chapitre et à la construction par Schur des groupes de représentation dans [204]. Les références respectives des auteurs que nous avons cités ici sont très limitées et en reviennent toujours à Schreier puis Baer. Le problème de l'extension apparaît à cette époque comme un sujet limité en termes de concepts et de méthodes. Pour autant il commençait à retenir de plus en plus l'attention à la fin des années 1930. Ses liens avec d'autres théories algébriques étaient peu à peu mis en valeur et utilisés pour obtenir des résultats sur les extensions[47]. On remarque surtout que le concept de groupe des extensions ou, ce qui revient au même, de groupe des classes de systèmes de facteurs, crée un lien fort avec les théories des systèmes hypercomplexes, des représentations de groupes et du corps de classes. Ce qui manque alors est une interprétation abstraite et unifiante des occurrences de ce groupe dans diverses théories. Nous verrons que la cohomologie répondra à ce défaut.

---

[46] Cf. [100] p. 222.

[47] On a mentionné l'utilisation de Scholz de la théorie du corps de classes dans [197], la reformulation par Hall du problème en termes de module sur l'anneau d'un groupe... On se rappellera aussi que Schur avait, à l'inverse, considéré les extensions pour la résolution d'un problème d'une autre nature, lié aux représentations projectives, et que Schreier avait développé une théorie abstraite des extensions essentiellement à la demande de Furtwängler en vue de résultats de la théorie du corps de classes.

Deuxième partie

L'influence décisive du développement de la topologie dans la création de la cohomologie des groupes

Les développements parallèles de diverses théories algébriques et les efforts d'unification de certaines d'entre elles, accomplis notamment par Richard Brauer et Emmy Noether, ont permis d'identifier des concepts, comme celui de groupe de Brauer, à grande signification algébrique, car susceptibles d'interprétation dans divers domaines.

On a mis en évidence le fait que dans l'algèbre de la fin du XIXe siècle au début des années 1940, on pouvait identifier a posteriori des résultats provenant de la cohomologie des groupes en dimensions 1, 2 et 3. Néanmoins on n'en peut trouver aucun en dimension supérieure. La volonté de compréhension et de généralisation de ces résultats a-t-elle, à elle seule, conduit à l'édification de la cohomologie des groupes ?

Le lecteur l'aura compris, si les manifestations de la cohomologie des groupes – avant que celle-ci ne soit fondée – sont nombreuses, elles sont néanmoins peu variées, se limitant aux dimensions 1, 2 et 3. A ce stade de notre étude historique, on peut donc imaginer principalement deux processus ayant pu mener à la naissance de la cohomologie des groupes, qui se sont d'ailleurs peut-être combinés. On peut d'une part imaginer que, sur la base des seuls exemples disponibles et du fait de l'intérêt porté notamment au groupe de Brauer et à ses analogues dans diverses théories, a été effectuée une généralisation du concept de systèmes de facteurs et des résultats cohomologiques en basse dimension, aboutissant à la mise au point d'une théorie cohomologique générale. Mais on peut également concevoir que les exemples cohomologiques disponibles étaient trop restreints pour mener à une vision globale qui les aurait compris comme des manifestations très particulières. Dans ce cas, la cohomologie des groupes a dû se construire au moins en partie hors des théories algébriques que nous avons étudiées, et ne s'est occupée que dans un deuxième temps d'interpréter des résultats et des concepts tels que le théorème 90 de Hilbert et le groupe de Brauer.

Ces histoires possibles renvoient à des problématiques plus larges de l'histoire des mathématiques. Il n'y aurait rien d'étonnant à ce que les quelques résultats et concepts cohomologiques que nous avons exhibés dans la première partie aient pu mener à eux seuls à une théorie générale. Mais, pour qu'une telle généralisation soit motivée, on s'attend raisonnablement à ce que la théorie générale permette une meilleure compréhension de la théorie des algèbres, des représentations ou des extensions grâce, par exemple, à de nouveaux résultats provenant de considérations cohomologiques en dimension 4 ou 5 – sinon, quelle est la vertu de la généralisation ? Ou alors, peut-on mettre la naissance de la cohomologie des groupes sur le compte d'un processus d'abstraction corollaire de l'essor de l'algèbre moderne, prenant pour base les théories précitées ?

Bien sûr, en scindant cette thèse en une partie algébrique et une partie essentiellement topologique, on donne au lecteur une vision initiale trouble de ce qu'est la cohomologie des groupes et de la manière dont elle a pu se former. Le terme "cohomologie" est en effet emprunté au vocabulaire de la topologie algébrique et suggère donc que la cohomologie des groupes provient potentiellement autant de la topologie que de l'algèbre. On ne peut donc apporter aucune réponse satisfaisante à la question de la naissance de la cohomologie des groupes sur la seule base de la première partie de cette thèse. Le but essentiel de la seconde partie, qui s'ouvre maintenant, est donc de déterminer les racines topologiques de la cohomologie des groupes et, *in fine*, de statuer sur les rôles et l'importance précises de la topologie et de l'algèbre dans sa naissance.

Chapitre 5

L'émergence de la notion de groupe d'homologie

L'introduction de concepts algébriques en topologie au début du vingtième siècle a, on le sait, été déterminante pour le devenir de la discipline. Elle a conduit à la formulation de nouveaux résultats[1] et à la mise en œuvre de calculs[2] pour la détermination explicite d'invariants topologiques, et a par la suite donné naissance à une nouvelle branche des mathématiques : l'algèbre homologique[3]. Il s'agit d'un moment clé du développement des mathématiques, caractérisé par le transfert de notions entre des domaines traditionnellement séparés des mathématiques au même titre, par exemple, que l'algébrisation de la géométrie par Descartes. Par là même, l'algébrisation de la topologie a pu acquérir une signification privilégiée et devenir un enjeu majeur pour l'histoire des mathématiques du vingtième siècle. Dieudonné, l'un des principaux historiens des mathématiques du vingtième siècle – quelles que soient les réserves légitimes qui peuvent être émises quant à sa pratique de l'histoire – ne s'y est pas trompé en consacrant son ouvrage historique majeur [55] à la topologie. Selon son analyse, y serait à l'oeuvre le mouvement de fond de l'histoire mathématique dans la perspective structuraliste :

– convergence des méthodes et unification des mathématiques (pour nous, la théorie des groupes et la topologie), au travers des transferts d'intuitions entre disciplines ;

[1] Cf. [113] p. 64 : "The sensational new concepts and results would have been impossible even to formulate without algebraic objects."

[2] Cf. [237] p. 797 : "A 1925 observation of Emmy Noether (...) shifted the attention to the "homology groups" of a space, and algebraic techniques were developed for computational purposes in the 1930's."

[3] Cf. [237] pour un survol de l'histoire de l'algèbre homologique et [55] pour un tour d'horizon, entre autres, de la topologie algébrique.

– rôle moteur de l'école algébrique allemande (Hilbert, E. Noether) ;
– émergence de structures abstraites en lieu et place des méthodes originelles, empreintes de recours à l'intuition.

L'histoire des sciences contemporaines, si elle s'est dégagée de cette grille de lecture du développement de la topologie algébrique, n'en a pas moins largement continué à débattre autour des mêmes thèmes, dont il convient de rappeler le caractère incontournable dès lors qu'ils ont été mis en avant par les protagonistes mêmes de ces développements de la topologie (Hopf et Alexandroff notamment). Ceci est perceptible notamment avec les travaux de Weibel [237] et McLarty [163]. Bien entendu, il serait par trop réducteur de limiter les débats à un simple dialogue avec la pensée structuraliste, et des travaux comme ceux d'Alain Herreman[4] se sont attachés à rompre avec les approches en termes de contenus théoriques et programmes de recherche pour décrire d'autres dimensions du phénomène de l'algébrisation de la topologie (en l'occurence au travers d'une analyse sémiotique mettant en évidence la polysémie – géométrique, algébrique et symbolique – des termes comme celui de chaîne).

Pour autant, en dépit de tous ces travaux et contributions, l'histoire interne mériterait d'en être encore approfondie et nous voulons y contribuer ici en montrant la priorité du rapport à l'objet dans l'émergence de la notion de groupe d'homologie. Bien entendu, cette histoire des objets et concepts est indissociable d'un mouvement plus complexe, où les programmes de recherche (le structuralisme de Noether), les relations humaines et professionnelles (les contacts entre Noether, Hopf, Alexandroff, Brouwer), l'environnement scientifique (le rôle de Göttingen dans les mathématiques des années 20) jouent, nous le verrons, un rôle essentiel. Cependant, même chez un auteur comme Hopf qui n'hésite pas à mettre ces facteurs au premier plan, c'est bien la résolution des problèmes mathématiques concrets qui reste le moteur du développement scientifique et donne l'occasion à ces facteurs "externes" de participer à l'émergence d'une nouvelle *doxa* topologico-algébrique.

Cette confluence de facteurs multiples dans l'édification de la topologie algébrique moderne nous semble d'ailleurs un cas d'école pour les mathématiques du vingtième siècle, et justifier amplement que nous y revenions plus avant ici. En fin de compte, notre propos sera double : dresser un tableau le plus complet possible de cette histoire, en entrant dans le détail du travail des concepts ; articuler ces moments conceptuels aux autres dimensions du phénomène historique et aux avancées récentes, quitte à laisser certaines questions ouvertes – peut-être pour toujours, les protagonistes directs ayant

[4] Cf. [106] pour une analyse spécifique de l'algébrisation de la topologie et [107] pour une étude sémiotique de quelques textes phares de la topologie de Poincaré à 1930.

disparu en nous laissant des témoignages en partie contradictoires et entachés des incertitudes de la mémoire d'évènements reculés.

Pour en revenir à notre objet d'étude, après ces digressions méthodologiques, la topologie, qui était jusque là traitée d'un point de vue combinatoire et faisait appel à une intuition de nature géométrique, s'est vue investie, au début du XXe siècle, par des outils de théorie des groupes et des concepts abstraits parfois difficilement interprétables en termes géométriques. Ce tournant du développement de la topologie est traditionnellement associé à l'introduction de la notion de groupe d'homologie. Voici pourquoi. Jusqu'alors les topologues associaient des nombres (dits "de Betti" et "de torsion") à leurs objets d'étude (les polyèdres ou "complexes") ; il était dans une large mesure connu, mais implicite, que ces nombres étaient caractéristiques de groupes sous-jacents aux polyèdres (groupes qui, lors de leur introduction, furent appelés "groupes de Betti" et "groupes d'homologie"). Parce que justement ces nombres permettaient de décrire sans ambiguïté les groupes en question, il n'était a priori pas nécessaire d'introduire les groupes en topologie combinatoire, sauf à créer une redondance d'informations à première vue inutile. Si l'on considère que l'introduction des groupes de Betti et d'homologie est un indicateur du début de l'algébrisation de la topologie, c'est parce qu'elle marque la première reconnaissance d'un intérêt véritable à considérer la structure de groupe en topologie et a, comme nous le verrons, ouvert la voie à une utilisation de la théorie des groupes en topologie.

Se pose donc une question simple et légitime : quelle est l'origine précise de la notion de groupe de Betti/d'homologie ? A savoir : qui les a conçus ? Qui les a considérés pour la première fois dans la littérature mathématique ? Avec quelles motivations, quels résultats et quel devenir ?

Ces questions ont déjà été considérées par de précédents travaux d'Histoire des mathématiques, avec un intérêt croissant au cours des vingt dernières années. Notre travail s'inscrit dans cette thématique de recherche et vise à en approfondir les analyses. Nous ferons, entre autres, une synthèse des travaux les plus pertinents sur le sujet[5]. Il en ressort qu'Emmy Noether a eu une influence prépondérante dans la définition des groupes de Betti/d'homologie et de manière plus générale, dans l'introduction de la théorie des groupes en topologie. Si le premier à définir les groupes d'homologie est Leopold Vietoris, mathématicien vivant à Vienne à l'époque qui nous intéresse, et certainement pas un proche d'Emmy Noether, on peut trouver trace d'une rencontre entre Vietoris et Noether – à l'occasion d'un repas chez Brouwer – au cours de laquelle celle-ci aurait expliqué la définition des groupes

[5]Citons notamment [54], [113], [152], [163], [228], [237].

de Betti[6]. Il semble donc à première vue que l'on puisse attribuer pour une part non négligeable la découverte de Vietoris à l'influence de Noether.

Cette analyse historique superficielle reflète en fait assez mal la réalité. Comme nous l'expliquerons en détails, on ne peut en effet qu'être d'accord avec l'affirmation suivante de Klaus Volkert[7] : "Die Algebraisierung in diesem Sinne scheint in zwei voneinander unabhängigen Entwicklungslinien begonnen zu haben". Les deux lignes de développement menant à la conception et l'utilisation des groupes d'homologie sont incarnées principalement par Noether et Hopf d'un côté, et Vietoris de l'autre. Si l'environnement conceptuel offert par les grands programmes de recherche – comme l'émergence de l'algèbre moderne et du structuralisme[8] – a de toute évidence joué un rôle important, le travail des concepts proprement dit, c'est en tout cas l'une de nos thèses, a joué un rôle essentiel. Aussi l'analyse détaillée du contenu des recherches mathématiques des auteurs cités est-elle à même de dégager avec clarté des oppositions fondamentales entre les méthodes concurrentes, leurs philosophies sous-jacentes, leurs objectifs et leurs résultats. Cette analyse permet de relativiser largement le rôle des propos de table tenus par Noether au cours du dîner chez Brouwer et, accessoirement, de mieux valoriser le rôle joué par Brouwer dans les travaux d'Alexandroff et Vietoris. Pour dire les choses crûment, l'imagerie un peu naïve du "tout est déjà chez Noether" soutenue par Hopf et Alexandroff, non sans une certaine instrumentalisation de l'histoire, nous semble-t-il, paraît même relativement choquante en ce qu'elle tend à substituer à la compréhension délicate de l'émergence des concepts – avec le point de vue de Poincaré, les ϵ-chaînes de Brouwer, l'étude des espaces compacts chez Vietoris, le travail formel d'algébrisation chez Hopf... – le réductionnisme un peu manichéen de l'interprétation structuraliste de l'histoire mathématique.

En montrant que l'on peut considérer que les groupes d'homologie ont été conçus simultanément, quasi indépendamment, selon deux approches fort distinctes, nous espérons en particulier illustrer le fait que le développement de la science a une logique interne qui ne s'intègre pas obligatoirement exclusivement au sein d'une vision de la science gouvernée par l'idée de grands programmes de recherche. Nous mettrons notamment en évidence le fait que la conceptualisation mathématique peut être gouvernée autant par un pro-

[6]L'épisode est évoqué par Alexandroff, également présent à ce dîner : "In the middle of December Emmy Noether came to spend a month in Blaricum. (...) I remember a dinner at Brouwer's in her honour during which she explained the definition of the Betti groups of complexes, which spread around quickly and completely transformed the whole of topology", [11] p. 324.

[7]Cf. [228] p. 283.

[8]Cf. [43].

gramme général de refonte des mathématiques (ici en l'occurrence l'influence de l'essor de l'algèbre moderne en topologie via les efforts de Noether[9]) que par des motivations bien moins générales, directement liées à une question mathématique concrète (la nécessité pour Vietoris d'adapter la théorie alors disponible en topologie à des espaces plus complexes).

Pour ce faire, nous commencerons par rappeller brièvement le cadre d'étude de la topologie dans les années 20. La deuxième section, propédeutique, s'intéressera à l'"abstract" d'un exposé d'Emmy Noether datant de 1925, qui porte en germe la notion de groupe d'homologie et nous donnera une base de réflexion pour l'étude des textes analysés dans les paragraphes suivants. Nous en profiterons pour mentionner les quelques (rares) occurrences de la notion de groupe en topologie avant 1925 afin de mettre en valeur l'avancée suggérée par les propos de Noether.

Nous entrerons ensuite dans le coeur de l'analyse mathématique des articles d'époque les plus importants en lien avec notre étude, à savoir : une communication de Vietoris (publiée en 1927) aux *Mathematische Annalen* faisant suite à l'article de 1926 ([226]) et les articles *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel* de Heinz Hopf et *Über abstrakte Topologie* de Walther Mayer[10]. Ceux-ci feront l'objet, au cours des sections 3, 4 et 5, d'une analyse spécifique. Nous confronterons ces articles entre eux et, plus particulièrement, nous pencherons sur l'influence de Noether dans le travail de Hopf. Nous discuterons dans la 6e section de la place du travail de Vietoris vis-à-vis des idées de Noether (qu'Alexandroff a pu lui transmettre) et de Brouwer, avant de conclure en menant notamment une réflexion sur le rôle des traditions et de la culture mathématiques de chaque mathématicien dans sa propre production et dans son appréciation des autres contributions, y compris à titre rétrospectif. Nous mentionnerons les conséquences épistémologiques qui peuvent en être tirées quant au mode de fontionnement de la communauté mathématique et à ses modes de communication et de diffusion du savoir.

Comme nous l'avons déjà dit, il devrait notamment ressortir de cette analyse que l'introduction des groupes d'homologie par Vietoris et par Noether/Hopf suit deux démarches extrêmement différentes.

[9] Cf. [43].

[10] Respectivement [118] et [159].

5.1 Arrière-plan conceptuel : la topologie combinatoire dans les années 1920

Le but de ce paragraphe n'est pas de tracer un historique du développement de la topologie, ou Analysis Situs, depuis les travaux d'Henri Poincaré de la fin du dix-neuvième siècle. Pour le lecteur curieux d'en apprendre plus sur ce développement nous renvoyons entre autres aux premières pages de [237] et aux sections 7.2 et 7.3 de [76], ainsi qu'à [195] pour une analyse synthétique du travail de Poincaré. Nous souhaitons uniquement donner au lecteur les définitions et concepts clés pour la compréhension des objets au centre des réflexions de Noether, Vietoris, Hopf, etc., dont nous débattrons par la suite. L'exposé relativement abstrait et axiomatique qui suit ne doit pas faire oublier au lecteur que la topologie a des inspirations fortement géométriques, ce qui est perceptible dans le vocabulaire utilisé.

Un rappel préliminaire des notions utilisées de façon courante dans les textes étudiés ci-après est nécessaire non seulement pour la compréhension du propos mais aussi parce qu'il permet de repérer les différences et variations dues à des innovations conceptuelles. Sans entrer dans le détail des terminologies diverses ni dans une description historique du développement de la topologie depuis les travaux de Poincaré, nous pouvons néanmoins donner un socle de définitions commun aux topologues des années 20. Plusieurs définitions des différents objets, se recoupant les unes les autres, ont cohabité, et nous privilégions ici la plupart du temps la version de J. W. Alexander dans [4]. Ce choix est motivé par l'importance des travaux d'Alexander en topologie, par le fait que son article est contemporain de ceux étudiés dans les paragraphes suivants, et parce que Hopf semble reprendre en partie sa terminologie dans [118] (ce point sera détaillé plus loin). La seule exception concernera la définition de "complexe" qui, dans [4] (selon Alexander lui-même, p. 302), est plus restrictive que les définitions habituelles.

Nous devons tout d'abord rappeler la définition d'un "simplexe" : un k-simplexe est, selon les propres termes d'Alexander, l'analogue k-dimensionnel d'une région tétraédrique (un 1-simplexe est donc un segment, un 2-simplexe un triangle plein, un 3-simplexe un tétraèdre plein, etc.). Tout k-simplexe possède un "bord" défini comme l'ensemble de ses sous-simplexes (aussi appelés "faces") de dimension 0 à $k-1$ (le bord d'un 0-simplexe est le vide). Ainsi défini, un simplexe est entièrement déterminé par la donnée de ses sommets (les 0-faces).

On peut se représenter un "complexe" comme un agrégat de simplexes éventuellement soudés entre eux selon certaines de leurs faces. Rigoureusement, un complexe peut être défini comme un ensemble fini de simplexes, vérifiant les propriétés :

1. deux simplexes quelconques de l'ensemble ne peuvent s'intersecter que selon une de leurs faces[11] ;
2. toute face d'un simplexe de l'ensemble est elle-même un simplexe de l'ensemble.

Les simplexes d'un complexe Φ sont aussi appelés "cellules".

Une "i-chaîne élémentaire" d'un complexe Φ est une expression symbolique de la forme

$$\pm V_0 V_1 ... V_i,$$

les V_j désignant les sommets d'une i-cellule de Φ. Deux expressions de la forme précédente sont considérées comme identiques si elles coïncident par permutation paire des sommets qui les composent, opposées si elles coïncident par permutation impaire des sommets qui les composent. On peut exprimer cette propriété en disant qu'une i-cellule $|V_0 V_1 ... V_i|$ admet deux orientations distinctes, celle définie par la suite de symboles $V_0 V_1 V_2 ... V_i$ et celle définie par la suite de symboles $V_1 V_0 V_2 ... V_i$ par exemple[12]. Si l'on désigne les i-chaînes élémentaires par E_s^i, est appelée i-chaîne de Φ toute combinaison linéaire de la forme

$$K^i = \sum_{s=1}^{\alpha^i} x^s E_s^i,$$

où les x^s sont des entiers et où α^i désigne le nombre de i-chaînes élémentaires de Φ.

Le bord, défini précédemment ensemblistement sur les simplexes, peut également être défini algébriquement sur les chaînes : le bord de la i-chaîne élémentaire $V_0 V_1 ... V_i$ est défini comme la $(i-1)$-chaîne

$$\sum_{s=0}^{i} (-1)^s V_0 ... V_{s-1} V_{s+1} ... V_i.$$

[11] Dans [4], Alexander donne pour son propos une définition plus restrictive que celle énoncée ici. La définition ici proposée est plus représentative des définitions alors usuelles des complexes.

[12] Au sujet de l'orientation, la remarque suivante d'Alexander mérite l'attention ([4] p. 311) : "We prefer, however, to treat the expressions $\pm V_0 V_1 ... V_i$ as purely symbolical, so as not to go into the question of just what is meant by an oriented cell." Alexander procède ici volontairement de façon abstraite en considérant une expression symbolique sans chercher à en donner une représentation géométrique ou une quelconque intuition. Cette démarche se distingue de sa propre volonté de définir un simplexe (analogue d'un tétraèdre) par recours à l'intuition géométrique. Nous reviendrons sur la question de l'orientation au cours du troisième paragraphe.

La définition du bord est ensuite étendue aux chaînes quelconques par linéarité.

Une chaîne est dite fermée ou est appelée "cycle"[13] si son bord est nul. Il est important de noter que tout bord est un cycle (ce qui traduit l'idée intuitive qu'un bord n'a pas de bord). La relation d'homologie s'introduit alors de la façon suivante : un cycle K est dit "homologue à 0" et on note $K \sim 0$ s'il est le bord d'une chaîne de Φ. Deux chaînes quelconques K et K' de Φ sont dites homologues, et on note $K \sim K'$, si leur différence est homologue à 0 ($K - K' \sim 0$).

Il est maintenant possible d'introduire les nombres alors associés par les topologues aux complexes, et qui furent remplacés plus tard par les groupes d'homologie. Est appelé "i-ème nombre de connexité" (ou également "i-ème nombre de Betti") du complexe Φ, et est noté P^i, le nombre maximal de i-cycles linéairement indépendants de Φ, relativement à la relation d'homologie.

Les nombres de Betti peuvent être calculés à l'aide d'un des outils primordiaux des topologues avant l'introduction des groupes d'homologie : les "matrices d'incidence". Si les bords des α^i i-chaînes élémentaires E_s^i s'écrivent sous la forme

$$\sum_{j=1}^{\alpha^{i-1}} \mu_s^j E_j^{i-1},$$

alors la matrice d'incidence en dimension i de Φ est la matrice des coefficients μ_s^j, $1 \leq s \leq \alpha^i$, $1 \leq j \leq \alpha^{i-1}$. Les matrices d'incidence donnent une description complète des complexes en traduisant les relations d'incidence entre les $(i-1)$-chaînes élémentaires et les i-chaînes élémentaires. Si l'on note ρ^i le rang de cette matrice alors on peut montrer (comme le mentionne Alexander dans [4] p. 316) que le i-ème nombre de Betti de Φ vérifie :

$$P^i = \alpha^i - \rho^i - \rho^{i+1}.$$

Le calcul du rang des matrices d'incidence permet donc de déterminer les nombres de Betti de Φ. En outre, depuis les travaux de Poincaré, d'autres nombres étaient considérés comme importants pour la description des complexes : il s'agit des diviseurs élémentaires[14] distincts de ± 1 des matrices d'incidence, appelés "nombres de torsion".

---

[13]Dans [4], Alexander désigne ce concept par l'expression "chaîne fermée" mais la terminologie usuelle est celle de "cycle".

[14]On trouvera plus de détails au sujet des diviseurs élémentaires dans le paragraphe suivant.

5.2 Emmy Noether

Emmy Noether, fille du célèbre mathématicien Max Noether, est née à Erlangen en 1882. Ayant mené la quasi-totalité de ses études jusqu'à ses premières recherches en théorie des invariants à Erlangen, elle s'est ensuite établie à Göttingen en 1915, ayant répondu à l'invitation de David Hilbert et de Felix Klein. Ses compétences dans le domaine des invariants différentiels devaient initialement amener Noether à assister Hilbert dans ses recherches en physique mathématique, mais elle se tourna peu à peu vers l'algèbre. Ses travaux à partir de 1920 en firent progressivement le chef de file de l'algèbre au sein de l'Institut mathématique de Göttingen. De par l'influence d'Emmy Noether, relayée notamment par l'ouvrage *Moderne Algebra* de van der Waerden, Göttingen est considérée comme le berceau de l'algèbre moderne. Elle a même pu être considérée, de 1920 au début des années 30, comme la capitale mondiale des mathématiques, de par la réussite des mathématiques allemandes et la présence à l'Institut des plus grands mathématiciens allemands de l'époque, au premier rang desquels Hilbert, Courant, Klein et bien sûr Noether.

Si Emmy Noether est connue pour son rôle prépondérant dans l'avènement de l'algèbre moderne, son influence en topologie semble beaucoup moins évidente car elle n'a jamais publié d'article de topologie[15]. Pour autant, la littérature mathématique contient une de ses remarques sur le sujet ; nous y consacrons une part conséquente de ce paragraphe. Cette remarque se trouve dans l'"abstract" d'un exposé effectué par Noether lors d'une réunion de la Göttinger Mathematische Gesellschaft en date du 27 janvier 1925. Il s'agit d'une note très courte (parue en 1926) [171], relativement méconnue[16].

L'exposé d'Emmy Noether est intitulé "Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie"[17]. Etant donnée son importance, nous en reproduisons ici intégralement le résumé :

"Die Elementarteilertheorie gibt bekanntlich für Moduln aus ganzzahligen Linearformen eine Normalbasis von der Form $(e_1y_1, e_2y_2, ..., e_ry_r)$, wo jedes e durch das folgende teilbar ist ; die e sind dadurch bis aufs Vorzeichen eindeutig festgelegt. Da jede Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden dem Restklassensystem nach einem solchen Modul isomorph ist, ist dadurch der Zerlegungssatz dieser Gruppen als direkte Summe größter zyklischer mitbe-

[15] C'est ce que semble indiquer en tout cas sa bibliographie, cf. "Verzeichnis der Veröffentlichungen Emmy Noethers" [231] pp. 475-476.

[16] Cette source n'est guère citée, et on ne peut plus brièvement, que par [152], [237] et [163], et est absente des œuvres complètes d'Emmy Noether. Klaus Volkert la reproduit intégralement dans [228] mais sans commentaire.

[17] "Déduction de la théorie des diviseurs élémentaires à partir de la théorie des groupes".

wiesen. Es wird nun umgekehrt der Zerlegungssatz rein gruppentheoretisch direkt gewonnen, in Verallgemeinerung des für endliche Gruppen üblichen Beweises, und daraus durch Übergang von Restklassensystem zum Modul selbst die Elementarteilertheorie abgeleitet. Der Gruppensatz erweist sich so als der einfachere Satz ; in den Anwendungen des Gruppensatzes – z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie – ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich."

Analysons ces quelques lignes. Noether commence par rappeler un résultat classique ; si l'on considère un système de formes linéaires à coefficients entiers, soit $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$, etc., où les α_k, β_k,..., sont des entiers et les x_k des indéterminées, et si l'on note N le $\mathbb{Z}$-module engendré par ces formes, alors on peut trouver des quantités y_1,...,y_m, combinaisons à coefficients entiers des x_k et des entiers e_1,...,e_r[18] se divisant successivement, tels que $(e_1 y_1, ..., e_r y_r)$ forme une base de N. Formulé autrement, ce résultat revient à dire que, si l'on considère le module libre de type fini M engendré par les x_k, on peut en trouver une base y_1,...,y_m dans laquelle les formes linéaires $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$,..., voient leur écriture simplifiée au possible (vu qu'elles deviennent simplement $e_1 y_1, e_2 y_2$,...). Le résultat tel que présenté par Noether reste encore ancré dans l'héritage des systèmes linéaires vu qu'il signifie juste que l'on peut rendre diagonal, à l'aide d'opérations élémentaires, un système d'équations de la forme[19]

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + \ldots = & A \\ \beta_1 x_1 & + & \beta_2 x_2 & + \ldots = & B \\ \ldots & & & & \end{array} \right.$$

Nul doute que Noether a pu privilégier cette présentation traditionnelle de la proposition des diviseurs élémentaires pour rester le plus possible en phase avec son public mais celle-ci aurait certainement préféré une présentation plus abstraite (considérant uniquement des modules, sans recours au langage des formes linéaires) et plus générale (qui ne se limite pas aux $\mathbb{Z}$-modules)

[18] appelés "diviseurs élémentaires".

[19] A la fin du procédé, le système en question a été mis sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} e_1 y_1 & + & 0 & + 0\ldots = & A' \\ 0 & + & e_2 y_2 & + 0\ldots = & B' \\ \ldots & & & & \end{array} \right.$$

Il est à noter que l'emploi même de la notion de module, ou dans le langage d'alors, de "Linearformenmodul", n'était en soi pas courant à l'époque, bien qu'il était très clair que l'ensemble des cycles notamment vérifiait les propriétés d'un module. L'usage des matrices d'incidence et des opérations matricielles était l'habitude.

que l'on peut notamment trouver dans le *Moderne Algebra*[20] de son élève, Bartel Leendert van der Waerden.

Noether explique ensuite que le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie peut être prouvé à l'aide de la théorie des modules et des diviseurs élémentaires qu'elle vient de rappeler. En effet tout groupe abélien de génération finie peut être vu comme quotient d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini par un sous-module de "formes linéaires"[21] et donc, une fois mis en œuvre le procédé des diviseurs élémentaires, il apparaît que G peut s'écrire comme somme directe de groupes cycliques d'ordres respectifs e_1,...,e_r plus éventuellement des groupes monogènes infinis[22].

Noether fait ensuite remarquer – c'est le point primordial de cette note – que l'on peut très bien se passer de la théorie des modules pour prouver ce théorème et l'obtenir directement avec les seuls outils de la théorie des groupes en généralisant la preuve pour les groupes abéliens finis[23], et ainsi en déduire la théorie des diviseurs élémentaires – elle renverse ainsi totalement l'ordre classique rappelé au début de son exposé, selon lequel on déduit le théorème de décomposition des groupes abéliens de type fini de la théorie des diviseurs élémentaires. Noether considère même qu'il est plus simple de procéder de la sorte. Ce constat l'amène à la conclusion suivante : "in den Anwendungen des Gruppensatzes – z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie – ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht

[20]La proposition des diviseurs élémentaires ("Elementarteilersatz"), telle qu'énoncée par van der Waerden dans [230] p. 122, affirme :

si N est un sous-A-module d'un A-module libre de type fini M, alors il existe une base $(u_1, ..., u_m)$ de M et une base $(v_1, ..., v_n)$ de N, avec $n \leq m$, et des entiers ϵ_1,...,ϵ_n tels que :
– $v_i = \epsilon_i u_i$ *pour* $i \in \{1, ..., n\}$;
– $\epsilon_{i+1} \equiv 0 \ (\epsilon_i)$.

Cette proposition est valable dans le cas où A est un anneau euclidien, ou encore si A est un anneau principal.

[21]Par exemple, si G est un groupe abélien engendré par les éléments $g_1, ..., g_n$ soumis aux relations $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = 0$, $\sum_{k=1}^n \beta_k g_k = 0$, etc., on peut le voir comme quotient du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par g_1,...,g_n par le module engendré par les quantités $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k$, $\sum_{k=1}^n \beta_k g_k$, etc.

[22]De façon moderne cela revient à dire que G est isomorphe à un produit de la forme

$$\mathbb{Z}^p \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_1)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_2)} \times ... \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_r)}.$$

[23]Le théorème de décomposition pour les groupes abéliens finis a, selon Van der Waerden (cf. [232] p. 150), été prouvé pour la première fois par Kronecker (cf. [139]).

erforderlich."[24]

Noether suggère donc en conclusion un lien entre ses considérations théoriques sur les groupes abéliens et diviseurs élémentaires et la topologie. Il nous faut éclaircir ce point.

Le lien entre l'explication de Noether sur les modules et les groupes et sa conclusion sur les nombres de Betti et de torsion se fait via la notion de module. Comme on l'a vu dans le premier paragraphe, le regard des topologues de l'époque se portait sur les chaînes, qui sont des combinaisons linéaires de chaînes élémentaires. C'est Poincaré qui avait eu l'idée de travailler non pas sur les simplexes ou cellules, qui ont une réalité géométrique, mais sur des combinaisons formelles de tels objets. En tant que chaînes particulières, les cycles peuvent également être sommés entre eux de manière formelle. Les cycles forment donc ce qu'on appelle maintenant un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, mais cette terminologie n'était pas utilisée couramment à l'époque. Parmi les cycles, certains sont des bords. Etant donnée une base $(x_1, ..., x_m)$ des cycles (en tant que $\mathbb{Z}$-module), les bords s'écrivent donc comme combinaison linéaire à coefficients entiers des x_i, c'est-à-dire ont la forme $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$, etc. En appliquant l'algorithme des diviseurs élémentaires on obtient les nombres de torsion, e_i, et le nombre de ces diviseurs élémentaires permet de déterminer le rang de la matrice d'incidence (cf. le paragraphe 1), et donc les nombres de Betti.

De manière synthétique, le point de vue de l'époque, tel que formulé par Noether dans le langage des modules, était le suivant. L'ensemble N des bords d'une dimension fixée k forme un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, que l'on peut voir comme sous-$\mathbb{Z}$-module du $\mathbb{Z}$-module libre M des k-cycles. Une base de M étant donnée, le théorème des diviseurs élémentaires montre que l'on peut trouver une base $(u_1, ..., u_m)$ de M formée de k-cycles et une base $(v_1, ..., v_n)$ de N formée de k-bords, telles que

– $v_i = \epsilon_i u_i$ pour $i \in \{1, ..., n\}$;
– $\epsilon_{i+1} \equiv 0 \ (\epsilon_i)$.

Les $\mathbb{Z}$-modules pouvant être vus comme des groupes abéliens, les propos de Noether[25] invitent à considérer les ensembles des i-cycles et des i-cycles homologues à 0 comme des groupes. Le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie appliqué au quotient du groupe des i-cycles par le groupe des i-cycles homologues à 0 fait apparaître le i-ème nombre de Betti et les coefficients de torsion (il s'agit respectivement de p et de e_1, e_2, ..., e_r, selon la notation utilisée plus haut). Emmy Noether semble justifier ce point

[24]"dans la mise en œuvre du théorème pour les groupes – par exemple pour les nombres de Betti ou les nombres de torsion en topologie – un retour par la théorie des diviseurs élémentaires n'est donc pas nécessaire."

[25]Voir note 24.

de vue par une mise en œuvre du théorème de décomposition des groupes de génération finie plus aisée que la mise en œuvre des diviseurs élémentaires. En outre, bien que la brièveté de la communication de Noether ne nous donne qu'un accès restreint à ses idées, on peut supposer qu'elle envisageait un gain conceptuel avec l'introduction en topologie des outils de théorie des groupes par le biais des groupes de cycles, etc.

L'approche proposée par Noether n'est justifiée – à ce moment-là en tout cas – par aucun gain concret, aucune application à la simplification d'une preuve ou l'établissement d'un résultat nouveau. Il s'agit d'un simple changement de point de vue, d'une appréhension conceptuellement différente des objets de la topologie combinatoire. Est sous-jacente à cette vision originale la volonté de ne plus s'arrêter aux cycles mais de les regarder modulo la relation d'homologie. Alors que jusque là les nombres de Betti et de torsion étaient déterminés par un processus purement calculatoire de manipulation des cycles, ils sont avec Noether obtenus comme caractéristiques d'un groupe, le groupe résultant du passage au quotient du groupe des cycles par le groupe des bords, i. e. du quotient par la relation d'homologie. Il semble qu'il y ait eu pour certains mathématiciens quelques obstacles épistémologiques à effectuer ce passage au quotient[26], ce qui explique qu'il ait fallu attendre une trentaine d'années entre les travaux de Poincaré avec notamment la mise en évidence des nombres de Betti et de torsion et l'idée de Noether de considérer l'ensemble des cycles et des bords comme des groupes abéliens.

Une analogie pourra peut-être donner au lecteur une justification de la motivation de Noether à introduire les groupes en topologie, bien que sans gain pratique immédiat. La situation décrite ici est fort proche de celle exposée par Leo Corry dans [43] (pp. 29-32) au sujet du théorème de Jordan-Hölder. En résumé, Camille Jordan, dans un article de 1869, introduisit la notion de "suite de composition" d'un groupe quelconque G non simple. Il s'agit d'une suite croissante de sous-groupes de G dont chacun est distingué dans le suivant, et minimale, au sens où il ne peut être inséré aucun sous-groupe entre deux sous-groupes consécutifs de cette suite qui satisfasse les conditions précédentes. Jordan forma les quotients des ordres de deux sous-groupes successifs d'une suite de composition, et appella les nombres obtenus les "facteurs de composition" (associés à la suite). Il prouva que le nombre de ces facteurs et leurs valeurs sont indépendants de la suite de composition considérée, et forment donc un invariant de G.

Comme l'explique Leo Corry, cette formulation en termes d'invariants

[26] A la page 191 de [163], en note, McLarty mentionne l'avis d'Erhard Scholz selon lequel Weyl s'empêchait de réaliser des quotients de groupes car n'aimant pas former des ensembles d'ensembles infinis.

numériques nous apparaît rétrospectivement comme limitée. Le travail d'Otto Hölder dans l'article [114] de 1889 pousse plus loin l'analyse des suites de composition et montre qu'il y a plus d'enseignements à tirer que la simple invariance des facteurs de composition mise en évidence par Jordan. En effet, plutôt que de considérer uniquement les quotients des ordres des sous-groupes consécutifs d'une suite de composition, Hölder définit le concept de "groupe quotient" et fit le quotient des sous-groupes consécutifs. A l'aide de cette nouvelle notion, le théorème de Jordan devint : *la collection des groupes quotients déterminés par une série de composition de G est un invariant*[27] *de G.*

Ainsi dans le développement historique initial de ce théorème, dit de Jordan-Hölder, peut-on voir de nombreuses similarités avec la remarque de Noether concernant la théorie des groupes et la topologie. L'information pertinente dans les deux situations est initialement exprimée numériquement ; l'ajout d'une composante structurelle, qui se trouve être dans les deux cas un groupe, permet de reformuler le résultat de manière plus abstraite et, particulièrement dans le cas du théorème de Jordan-Hölder, en gagnant de l'information. L'ajout de la structure permet de gagner en profondeur dans la compréhension, d'ouvrir des perspectives. Dans le cas du travail d'Hölder, les nouveaux concepts introduits soulevèrent de nouveaux problèmes féconds comme ceux de factorisation et d'extension de groupes. En topologie, l'introduction de la théorie des groupes fut source d'une compréhension bien supérieure et aboutit à l'émergence d'un nouvelle discipline : la topologie algébrique.

Néanmoins, dans le cadre de la remarque de Noether, l'introduction des groupes en topologie n'apporte dans l'immédiat aucune information réelle supplémentaire – étant donné, comme cela a déjà été mentionné, que les groupes abéliens de type fini sont caractérisés par les nombres de Betti et de torsion. Le gain est donc moins évident que dans le cadre de la reprise par Hölder du théorème de Jordan. Ce sont les développements ultérieurs, au premier rang desquels ceux de Vietoris et Hopf traités dans les paragraphes suivants, qui apporteront une première démonstration de l'intérêt de l'introduction des groupes en topologie.

Avant de clore ce paragraphe, nous voulons évoquer une question que le lecteur peut légitimement s'être posée. On peut en effet trouver étrange que l'idée de considérer les ensembles de chaînes, de cycles ou de bords comme des

[27]Pour être totalement clair, cette collection est la collection des quotients de sous-groupes consécutifs d'une suite de composition de G. L'invariance est bien sûr prise à isomorphisme près, Hölder précisant bien au début de son article que deux groupes isomorphes peuvent être considérés comme deux mêmes objets.

groupes abéliens n'ai pas vu le jour plus tôt. Pour être tout à fait complets nous devons d'une part préciser qu'il existe des occurrences de la notion de groupe en lien avec les cycles avant 1925 mais aussi les commenter au vu de la remarque de Noether. En soi, la notion de groupe n'était pas du tout étrangère à la topologie. Poincaré lui-même appelait "groupe fondamental" d'un espace l'ensemble des lacets basés en un même point de cet espace, considérés à homotopie près. Ce groupe était souvent décrit par Poincaré et ses successeurs via générateurs et relations. Poincaré savait qu'en ajoutant les relations de commutativité entre générateurs, le nombre de générateurs linéairement indépendants restant coïncide avec le nombre de Betti 1-dimensionnel, ce qui lui fournissait un lien entre homotopie et homologie, en dimension 1 du moins. Pour autant, Poincaré n'a jamais voulu appelé "groupe" le groupe justement obtenu à partir du groupe fondamental en rajoutant les relations de commutation (i.e. l'abélianisé du groupe fondamental). Si l'on se fie à Colin McLarty par exemple, l'explication de ce fait rétrospectivement curieux semble tenir en le refus de Poincaré d'appeler "groupe" un groupe commutatif et même d'appeler "groupe" un ensemble qui ne soit pas un groupe de permutations[28].

Un prolongement de cette idée se retrouve dans la dissertation *Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen* de Hugo Gieseking (1912), un étudiant de Max Dehn. En effet, s'intéressant notamment à l'homotopie sur une surface orientable fermée, Gieseking en vint à considérer le groupe abélien obtenu à partir d'un système de générateurs du groupe fondamental de la surface. Il cita une étude antérieure de Tietze montrant que cet abélianisé du groupe fondamental permet de déterminer les nombres de Betti et de torsion associés à la surface. Gieseking appella ce groupe le "groupe abélien de la surface orientable fermée"[29].

On trouve la même construction dans la deuxième édition du classique *Analysis Situs* d'Oswald Veblen[30]. Veblen nomme même "homology group" le groupe abélien ainsi obtenu (qui est le groupe d'homologie 1-dimensionnel), ce qui semble constituer la première occurrence de la terminologie "groupe d'homologie".

A titre de remarque, Hermann Weyl est quelquefois cité (précisément son article [240], par McLarty notamment) comme ayant évoqué les notions de "groupe des cycles" et "groupe des bords" d'un espace simplicial. Il semble pourtant que ceci soit inexact. En effet, dans [240], Weyl n'évoque qu'une

[28]Cf. [163] pp. 207-208.

[29]"Abelschen Gruppe einer geschlossenen zweiseitigen Fläche". Les quelques remarques que nous venons d'effectuer sur Gieseking ne sont qu'un résumé sommaire de l'étude de Ria Vanden Eynde, [223] pp.174-178.

[30]Cf. [224] pp. 145-149. L'original est de 1916 et la deuxième édition de 1921.

seule fois le concept de groupe ("grupo"). C'est en première page de l'article ; Weyl s'intéresse à l'ensemble des vecteurs à n coordonnées entières, qui forme un module ("modulo") ou plutôt un réseau ("red") selon la terminologie qu'il privilégie. Weyl précise juste en passant que le concept de réseau est similaire à celui de groupe additif[31]. Certes il opère le lien plus tard avec les diviseurs élémentaires, puis encore après avec les nombres de Betti et de torsion, mais sans réutiliser le concept de groupe, et il n'y a donc pas assez de matériaux affirmer qu'il y parle de groupe de cycles ou de bords.

Il ne faut donc pas en soi s'attarder uniquement sur le fait que Noether introduit la notion de groupe en lien avec la topologie. On ne peut lui reconnaître une originalité et exclusivité totales au vu des exemples précédents. Néanmoins les occurrences précédentes de la notion de groupe en rapport avec l'homologie ne se faisaient que via la dimension 1. Il se trouve que le groupe d'homologie en dimension 1 est l'abélianisé du groupe fondamental, mais il n'y a pas de relation aussi simple entre homologie et homotopie en dimension supérieure. Le groupe d'homologie 1-dimensionnel obtenu par Gieseking ou Veblen ne provient pas du passage au quotient du groupe des cycles par le groupe des bords mais simplement de l'abélianisation du groupe fondamental. La démarche de Noether est évidemment plus profonde. Elle décide de travailler sur les cycles à homologie près, via un passage au quotient de deux groupes, et ce en dimension quelconque. Son procédé est de se point de vue totalement général, non restreint à la dimension 1.

L'analyse de cette remarque de Noether nous ayant en particulier permis d'appréhender les notions de groupe des chaînes, des cycles, etc. et l'utilisation de ces notions pour calculer les nombres de Betti et de torsion, nous allons maintenant pouvoir aborder l'étude des textes cités en introduction. Nous procéderons de façon chronologique en commençant par l'étude de l'article [226] de Vietoris, première publication où figure une définition des groupes d'homologie.

5.3 Leopold Vietoris

Leopold Vietoris, mathématicien autrichien né en 1891, a partagé l'essentiel de sa scolarité et de sa carrière entre Vienne, Graz et Innsbruck. Son activité mathématique, d'abord concentrée sur la topologie générale, s'orienta à partir de 1925 vers la topologie combinatoire, à l'occasion d'un séjour en tant que "Rockefeller fellow" chez L. E. J. Brouwer à Amsterdam. Les résultats de ses recherches d'alors parurent via les articles [225], [226] (soumis le

[31] "El concepto de red es, pues, el mismo que el de "grupo respecto a la adició n"".

28 juin 1926) et firent l'objet de sa conférence du 24 septembre 1926 devant la Deutschen Mathematiker-Vereinigung intitulée *Über den höheren Zusammenhang kompakter Raüme*[32]. Ces travaux furent réalisés intégralement lors du séjour de Vietoris chez Brouwer, au carrefour des années 1925 et 1926 et l'influence de ce dernier y est très perceptible. Vietoris précise notamment dans la première note de [226] que ses recherches sont nées d'une remarque orale de Brouwer[33] et, à la lecture de l'article, on peut constater qu'il a repris les concepts et la terminologie de l'article [29] de ce dernier.

Dans [29], Brouwer prouve un résultat plus général que ne l'annonce le titre ("Invariance de la courbe fermée") ; il établit que le nombre de domaines délimités par un ensemble plan, borné, connexe, parfait (i.e. fermé et sans point isolé) est invariant par bijection continue (donc est un invariant topologique). Considérant un ensemble π comme ci-dessus et $(h+1)$-connexe[34] et un point P de π, il montre qu'il existe un système de h lacets dans π d'origine P (mais aucun système de moins de h lacets) tel que tout lacet dans π ayant pour origine P est homotope à la composée d'un nombre fini de lacets (et de leurs inverses) de ce système. Pour ce faire, il considère à la place des lacets des ensembles finis de points, invariants par permutation cyclique, et tels que la distance entre deux points consécutifs est inférieure à ϵ, qu'il nomme ϵ-chaînes[35] ("ϵ-Ketten"). L'homotopie sur les lacets est, elle, traduite par des ϵ-modifications ("ϵ-Abänderungen") consistant à modifier légèrement les ϵ-chaînes par ajout, élimination ou déplacement de points.

L'article [226] est proche sur de nombreux points de [29]. Vietoris y définit les groupes de connexité et d'homologie d'une partie quelconque M d'un espace métrique sans s'en remettre à l'existence d'une décomposition de M en cellules. A cet effet, il commence par considérer des complexes combinatoires, et donne des définitions assez proches de celles d'Alexander, quoique sans faire appel à la notion de tétraèdre et, de manière plus générale, sans faire référence à des objets ou des intuitions de nature géométrique.

Ainsi, un n-simplexe est défini par Vietoris comme l'ensemble formé de $n+1$ points, ainsi que de toutes les paires, triplets, ..., n-uplets formés à partir de ces points. Cette définition est analogue à celle utilisée par Alexander dans

[32] Cf. [227].

[33] Cf. [226], note 1 p. 454 : "Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus, daß diese Invarianz (...) auch für die von ihm (...) eingeführte Vielfachheit der Basis der Zyklosis gilt."

[34] Cette terminologie n'est pas à prendre au sens actuel mais en un sens plus ancien, signifiant "délimitant un nombre $h+1$ de domaines" ; cf. [55], note p. 341.

[35] Cette discrétisation des lacets consiste en fait en une approximation affine, si l'on considère à la place d'un lacet la courbe obtenue comme réunion des segments reliant deux points consécutifs de la chaîne.

[4] si l'on considère la donnée d'une paire de points comme équivalente à celle du segment reliant ces deux points, la donnée d'un triplet de points comme équivalente à celle du triangle plein ayant ces trois points pour sommets, etc. Les idées géométriques sous-jacentes aux définitions données par Vietoris sont évidemment analogues à celles motivant les définitions que nous avons énoncées au premier paragraphe et la définition de complexe introduite par Vietoris, bien qu'exprimée en des termes différents de ceux d'Alexander, est équivalente à celle du premier paragraphe. Vietoris ajoute juste une idée, consistant à dire que les sous-simplexes[36] d'un complexe donné apparaissent avec une certaine multiplicité (qui correspond au fait qu'un même simplexe peut être face de plusieurs simplexes différents). Le bord d'un complexe C "k-dimensionnel homogène" (i.e. dont les simplexes – qui ne sont faces d'aucun autre – sont tous de dimension k) est défini comme le complexe formé à partir des simplexes $(k-1)$-dimensionnels qui sont faces d'un nombre impair de simplexes de C. Cette définition peut sembler curieuse mais résulte en fait de ce que Vietoris considère des simplexes non orientés : en effet, considérer des simplexes non orientés revient à considérer des complexes modulo 2.[37] Vietoris écrit d'ailleurs, pour deux complexes donnés K_1, K_2, la relation $K_1 = K_2 \pmod 2$, lorsque les multiplicités de leurs sous-simplexes sont égales modulo 2. Un n-cycle est un complexe n-dimensionnel homogène sans bord.

Enfin, Vietoris introduit l'opération somme sur les complexes (la somme de deux complexes K_1, K_2 est l'ensemble des sous-simplexes de K_1 et de K_2, chacun de ces sous-simplexes ayant pour multiplicité la somme de ses multiplicités respectives dans K_1 et K_2) puis introduit la relation d'homologie :

$R^{(k-1)} \sim 0$ dans C si $R^{(k-1)}$ est le bord d'un simplexe k-dimensionnel $S^{(k)}$ du complexe C.

Ayant précisé la compatibilité de la somme avec la considération des complexes modulo 2, il définit le n-ième groupe de connexité ("n-te Zusammenhangsgruppe") d'un complexe K comme étant le groupe des cycles n-dimensionnels non orientés de K modulo la relation d'homogie[38]. Est ap-

[36]Vietoris considère un complexe comme un ensemble fini de simplexes dont aucun n'est la face d'un autre, puis y ajoute les faces (sous-simplexes) de ces simplexes.

[37]L'intuition géométrique sous-jacente peut être éclairée par l'exemple suivant : si l'on se donne deux triangles pleins dans le plan ayant une arête $[ab]$ en commun, le complexe obtenu comme l'ensemble de ces deux triangles peut être représenté par la réunion de ces deux triangles. Cette réunion donne un quadrilatère dans lequel l'arête $[ab]$ a disparu car elle était le lieu de soudure des deux triangles. L'arête apparaissait deux fois, une fois dans chacun des triangles, et sa disparition lors de la formation du complexe peut être traduite par le fait que le complexe est considéré modulo 2.

[38]Cf. [226] p. 456 : "Wir betrachten nun für $K_1 \sim K_2$ die Operationen "$+K_1$" und "$+K_2$" als dieselbe Operation."

pelé k-ième nombre de connexité (“Zusammenhangszahl”) d’un complexe C le nombre maximal s de k-cycles de C entre lesquels il n’existe aucune relation d’homologie $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_s C_s \sim 0$ (ici les cycles ne sont pas considérés modulo 2 ; le nombre de connexité est donc identique au nombre de Betti).

Vietoris reprend ensuite ces définitions dans le cas de simplexes orientés[39]. Le bord d’un complexe K n-dimensionnel homogène est défini comme le complexe $(n-1)$-dimensionnel contenant l’ensemble des $(n-1)$-faces de K $(p-q)$ fois, si celles-ci apparaissent orientées positivement dans le bord d’exactement p n-faces de K et orientées négativement dans le bord d’exactement q n-faces de K. Le n-ième groupe d’homologie (“n-te Homologiegruppe”) d’un complexe C est alors défini comme le groupe des cycles n-dimensionnels orientés de K modulo la relation d’homologie.

Dans un deuxième temps, Vietoris effectue le transfert des notions sur les complexes combinatoires aux parties d’un espace métrique (son intérêt se concentrant finalement sur les parties compactes). Il commence par définir très généralement un complexe C dans un ensemble M comme étant un complexe au sens combinatoire défini précédemment dont les sommets appartiennent à M.[40] Il introduit ensuite une notion d’homologie lorsqu’une distance est donnée sur M :

un cycle C dans M est dit ϵ-homologue à 0 dans M (noté $C \sim_\epsilon 0$) s’il est homologue au sens combinatoire à une somme de bords de simplexes (dans M) de diamètres strictement inférieurs à ϵ.

La même vision géométrique que celle présente dans [29] guide les définitions. Par exemple, l’addition du bord $R^{(k)}$ d’un simplexe $(k+1)$-dimensionnel $S^{(k+1)}$ dont les arêtes sont toutes de longueur strictement inférieure à ϵ (il note $R^{(k)} \sim_\epsilon 0$) à un cycle k-dimensionnel $C^{(k)}$ est appelée "ϵ-Abänderung" de $C^{(k)}$. Vietoris généralise ainsi en dimension (finie) quelconque les idées liées à l’homotopie présentes dans l’article [29] de Brouwer. D’ailleurs, comme nous allons le voir, Vietoris définit également le groupe d’homotopie d’une partie M d’un espace métrique et ce, de façon totalement analogue au groupe d’homologie.

[39] Le principe de l’orientation a été donné dans le premier paragraphe pour les chaînes élémentaires. Il s’applique de la même façon aux simplexes considérés par Vietoris car ils sont entièrement déterminés par la donnée de leurs sommets.

[40] De tels complexes n’ont donc pas une grande réalité géométrique vu que seuls leurs sommets sont réellement dans M. Il n’est aucunement demandé, par exemple, que les segments reliant ces sommets soient bien inclus dans M.

Vietoris considère des *suites fondamentales*[41] F dans M ; il s'agit de suites de cycles k-dimensionnels $(C_m)_{m=1\ldots+\infty}$ dont les longueurs des arêtes tendent vers 0 avec m et tels que :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon,\ \forall n_1, n_2 > n_\epsilon,\ C_{n_1} \sim_\epsilon C_{n_2}.$$

Une suite fondamentale est dite ϵ-homologue à 0 s'il existe n_ϵ tel que $C_n \sim_\epsilon 0$ pour tout $n > n_\epsilon$. Une suite fondamentale F est appelée *suite nulle* ("Nullfolge") si elle est ϵ-homologue à 0 pour tout ϵ ; on écrit dans ce cas $F \sim 0$.[42]

Ayant alors précisé que les suites fondamentales formaient un groupe pour l'addition et les suites nulles un sous-groupe, il définit les n-ièmes groupes de connexité et d'homologie de M comme étant les groupes des suites fondamentales modulo la relation d'homologie sur les suites (ce qui revient à faire le quotient par le sous-groupe des suites nulles – ce que ne précise pas Vietoris). La distinction entre groupe d'homologie et groupe de connexité vient comme précédemment de ce que l'on considère les cycles orientés ou non.

Vietoris procède de façon analogue pour définir le groupe fondamental de M. Il prend comme chemins dans un complexe les chemins d'arêtes et introduit l'équivalence (comme analogue à l'homotopie) en disant qu'un chemin fermé W (de sommets initial et final identiques) est équivalent à 0 (noté $W \equiv 0$) dans un complexe C s'il est inclus dans une face de C, ou est somme de tels chemins. Pour un chemin fermé W dans M il écrit $W \equiv_\epsilon 0$ s'il est inclus dans un simplexe de M dont les arêtes sont de longueur strictement inférieure à ϵ. Il définit alors les suites fondamentales de chemins de façon totalement analogue aux suites fondamentales de cycles et définit l'équivalence sur les suites fondamentales de chemins en mimant l'homotopie sur les suites fondamentales de cycles. Une fois fixé un point o de M, il définit le groupe

[41] La terminologie employée est "*Fundamentalfolge*" ; on aurait également pu traduire par *suite de Cauchy* car la condition exprimée équivaut à une condition de Cauchy selon la métrique définie par Vietoris. En outre Felix Hausdorff, à la même époque, utilise le terme "*Fundamentalfolge*" pour désigner une suite de Cauchy dans son *Grunzüge der Mengenlehre*, cf. [102] p. 414.

[42] Ce sont donc les suites fondamentales qui joueront le véritable rôle de cycles de M. Géométriquement, il s'agit de suites d'ensembles de points représentant les sommets de complexes abstraits. Les conditions définissant les suites fondamentales assurent que les sommets des C_n sont espacés d'une distance de plus en plus faible à mesure que n augmente. De plus, elles forcent le nombre de sommets des C_n à tendre vers l'infini. La condition de Cauchy est là pour faire en sorte que, dans un compact, ces ensembles de points convergent vers un ensemble de points limite qui devrait dessiner un véritable cycle sur M.

Les suites nulles jouent, elles, le rôle des bords dans M. L'exigence d'être ϵ-homologue à 0 pour tout ϵ est là pour tenter d'assurer que les trous dans M seront bien détectés, et donc qu'une suite nulle délimitera bien une partie pleine – pour le dire de manière plus précise, homotopiquement triviale – de M.

fondamental de M par rapport à o comme le groupe des suites fondamentales de chemins de points initial et final o modulo la relation d'équivalence.

La suite de l'article est révélatrice de la conception qu'avait Vietoris des objets qu'il manipulait. Les groupes (de connexité, d'homologie, fondamentaux) qu'il a introduits sont étudiés en partie du point de vue de leurs propriétés topologiques : il montre qu'on peut les munir d'une distance qui en fait des espaces métriques complets et prouve que si M est compact alors le groupe de connexité de M l'est également. Toujours pour M compact, il montre que ces groupes possèdent chacun une famille génératrice (il emploie le mot "Basis") compacte et définit la multiplicité ("Vielfachheit") de ces groupes comme le plus petit nombre d'éléments d'une famille génératrice (qui peut être infinie dénombrable). La multiplicité des groupes de connexité et d'homologie est pour lui l'analogue des nombres de connexité et de Betti dans les complexes combinatoires. Reprenant la terminologie "Zyklosis"[43] employée par Brouwer dans [29], il fait le lien avec ses définitions (ce qui les justifie) en montrant que la multiplicité des "Zyklosis" non orientés est égale à la multiplicité du groupe de connexité de la dimension correspondante[44].

Tout ceci confirme l'importance des idées de Brouwer et la prépondérance des intuitions géométriques et des notions topologiques dans le travail de Vietoris. Dans [226], Vietoris n'utilise aucun outil de théorie des groupes, évite la terminologie des groupes quotients et travaille toujours sur les cycles ou les chemins et non sur leurs représentants à homologie ou équivalence près. Ainsi, si Vietoris introduit les groupes en topologie, c'est tout simplement parce qu'il ne peut faire autrement. Comme l'explique Mac Lane dans [152], l'intérêt de Vietoris se portant sur les espaces métriques compacts – qui peuvent avoir une infinité de trous, comme l'ensemble triadique de Cantor par exemple – leur homologie ne peut plus s'exprimer à l'aide des nombres de Betti ou de

[43] Il s'agit d'une terminologie très particulière, semblant provenir de [148]. Elle désigne les lacets employés par Listing pour mesurer la connexité. On trouvera des détails dans [28] p. 920.

[44] [226] p. 464 : "Die Vielfachheit der nicht orientierten Zyklosis ist gleich der Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe derselben Dimension."

torsion[45] et demande donc l'introduction de la structure de groupe[46] afin de définir l'analogue du nombre de Betti : la multiplicité. Comme cela a déjà été évoqué précédemment, il n'était pas ignoré que certains ensembles considérés à l'époque en topologie – comme l'ensemble des cycles – pouvaient être munis d'une structure de groupe. Vietoris l'admet lui-même dans une lettre à Puppe ([113] p. 62-63) : "Selbstverständlich wußten die Topologen schon vor diesen Arbeiten, daß sie es bei der Addition von Zykelklassen mit Abelschen Gruppen zu tun hatten. Weil sie aber wußten, daß diese Gruppen durch Rang- und Elementarteiler (Torsionszahlen) charakterisiert sind, hielten sie die Beschäftigung mit den Gruppen für überflussig."[47] L'intérêt du travail de Vietoris dépasse donc la seule introduction de la notion de groupe en homologie ; la notion de groupe est dans le cadre de son étude absolument nécessaire car ses objets d'étude (les espaces métriques compacts) ne pouvaient en général être décrits avec les nombres de Betti et de torsion jusqu'alors suffisants pour l'étude des complexes. Les groupes abéliens de type fini sont incapables de coder l'information homologique pour les espaces métriques compacts généraux.

En adoptant une approche géométrique inspirée par Brouwer, Vietoris a pu étudier l'homologie d'objets plus riches que les complexes simpliciaux. Une démarche plus classique aurait été de fournir un procédé général permettant d'associer un complexe simplicial à un espace métrique compact et de définir ensuite l'homologie de cet espace comme étant l'homologie du complexe associé. Mais la voie empruntée par Vietoris lui a permis justement de contourner la difficulté de l'affectation d'un complexe simplicial pertinent à un espace métrique compact quelconque, ce qui explique qu'il ait été le premier à définir la notion de groupe d'homologie.

On peut cependant légitimement se demander pourquoi le problème de la

[45]On a vu dans le premier paragraphe que les nombres de torsion étaient définis à partir des matrices d'incidence, elles-mêmes attachées à un complexe. Pour définir les nombres de torsion d'un espace métrique compact, il aurait donc fallu que Vietoris trouve comment associer un complexe simplicial (qui est un ensemble fini) à un espace métrique compact tout en en conservant les propriétés topologiques – ce qui est une entreprise vaine. Les nombres de Betti peuvent, eux, être définis sans le recours aux matrices d'incidence (cf. la définition donnée dans le premier paragraphe) mais on peut facilement obtenir des nombres de Betti infinis pour les espaces métriques compacts. En effet, si l'on considère un espace avec une infinité de trous, on obtient une famille infinie de 1-cycles indépendants en se donnant pour chaque trou de l'espace considéré un 1-cycle en faisant le tour.

[46]Cette explication de Mac Lane est d'ailleurs confirmée par Vietoris lui-même dans une lettre à Friedrich Hirzebruch, citée dans [113], p. 62.

[47]"Bien sûr, les topologues savaient déjà avant ce travail qu'ils avaient affaire à des groupes abéliens via l'addition de classes de cycles. Mais comme ils savaient que ces groupes sont caractérisés par le rang et les diviseurs élémentaires (nombres de torsion), ils considéraient cet emploi des groupes superflu."

définition d'une homologie pour des objets plus complexes que les complexes simpliciaux n'a pas rencontré une réponse antérieure à celle de Vietoris. Sans entrer dans les détails, il semble que cela soit lié au problème de la définition même d'une variété[48]. En effet, dans ses premiers articles sur l'*analysis situs*, Poincaré considéra des variétés différentiables, définies par exemple à l'aide de conditions sur des paramétrisations locales. La relation d'homologie était ainsi présentée :

$V_1 + V_2 + ... + V_K \sim 0$ *si les sous-variétés de dimension* m V_1,V_2,...,V_K *de la variété* M *forment le bord d'une sous-variété de dimension* $m+1$ *de* M.

Poincaré proposa également ensuite de représenter les variétés via une décomposition en cellules (donc de les représenter par des complexes cellulaires), affirmant semble-t-il que toute variété admet une triangulation. Il put ainsi introduire les matrices d'incidence et fournir un algorithme de calcul des nombres de Betti et définir les nombres de torsion. Mais la démarche de Poincaré souleva bon nombre de problèmes auxquels peu de réponses avaient été apportées au milieu des années 1920. On peut citer principalement le problème de l'existence d'une décomposition en cellules pour une variété donnée, l'invariance des nombres de Betti et de torsion pour deux triangulations d'une même variété, l'invariance de l'homologie ainsi définie pour deux variétés homéomorphes, etc. Ces problèmes sont en fin de compte liés à celui de la définition même de variété. Soit on adoptait le premier point de vue de Poincaré et tentait de montrer des théorèmes d'existence de triangulation pour de telles variétés, soit on partait du principe qu'une variété était – par définition – un complexe cellulaire, et on cherchait des conditions de nature combinatoire pour qu'une variété vérifie certaines propriétés comme la dualité de Poincaré. Etant donné la commodité des complexes cellulaires pour le calcul des nombres de Betti et de torsion et la difficulté à prouver l'existence de triangulations pour les variétés en général (l'existence de triangulations pour les variétés 2-dimensionnelles, par exemple, ne fut prouvée qu'en 1925 par T. Radó), on peut comprendre aisément que les topologues aient en général pris, jusqu'à Vietoris, les complexes simpliciaux comme base de leurs réflexions.

5.4 Walther Mayer

Le travail de Vietoris a une filiation directe et immédiate via celui de Walther Mayer (de Vienne), en particulier par le biais de l'article [159]. La

[48]Pour plus de détails, on pourra consulter [198].

première partie de [159], soumise le 16 novembre 1927, voit Mayer préciser en introduction : “In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte.”[49] Mayer se place d'un point de vue abstrait et donne un système d'axiomes pour les complexes[50]. Pour notre propos, nous nous limiterons à l'étude de la première partie, qui concerne essentiellement les définitions et l'axiomatique.

Les complexes sont vus comme objets d'un module[51] des complexes Σ et à chaque complexe est associé un entier – appelé dimension – compris entre 0 et un certain entier n qui est la dimension du module Σ. La notion de simplexe disparaît ainsi, de même que la notion de face, et en particulier celle de sommet, qui était jusque-là nécessaire pour déterminer la dimension d'un simplexe. Les axiomes introduits par Mayer sont les suivants :

1. il existe une opération entre les complexes de Σ qui fait de l'ensemble des complexes $\{K^{(\rho)}\}$ d'une dimension donnée ρ un groupe abélien ;
2. il n'y a aucun élément d'ordre fini dans $\{K^{(\rho)}\}$;
3. pour tout ρ il existe une famille finie de complexes ρ-dimensionnels $a_1^{(\rho)}$, ..., $a_\tau^{(\rho)}$ telle que tout complexe ρ-dimensionnel de $\{K^{(\rho)}\}$ est inclus dans $\left\{\sum_{i=1}^{\tau} p_i a_i^{(\rho)}, p_i \in \mathbb{Z}\right\}$;
4. il existe une opération R, dite "bord", qui à tout complexe ρ-dimensionnel $K^{(\rho)}$ de Σ $(1 \leq \rho \leq n)$ associe un complexe $(\rho - 1)$-dimensionnel de Σ noté $R(K^{(\rho)})$;
5. R est $\mathbb{Z}$-linéaire ;
6. $R \circ R = 0$.

Mayer en arrive ensuite très rapidement à définir les groupes d'homologie (juste après l'introduction des cycles, des nombres de torsion et des cycles homologues à 0). Il y a une avancée notable : alors que chez Vietoris le concept de groupe d'homologie pouvait apparaître forcé par les circonstances, il est ici pleinement assumé. Rien en effet dans ses axiomes n'obligeait Mayer à l'introduire et ce d'autant plus que, d'après l'axiome 3, les groupes de

[49]“J'ai été initié à la topologie par mon collègue Vietoris dont j'ai fréquenté le cours 1926/27 à notre Université.”

[50]Mayer renforce d'ailleurs ce point de vue abstrait en précisant que les complexes sont des objets qu'il ne faut pas forcément considérer comme représentant des entités géométriques.

[51]Le mot employé par Mayer est “Ring” mais comme il ne s'agit pas d'un anneau au sens actuel (la multiplication entre complexes n'est pas définie) nous préférons utiliser le terme “module” avec son sens actuel afin d'éviter toute confusion.

complexes sont de génération finie – donc entièrement caractérisés par les nombres de Betti et de torsion – au contraire de ceux utilisés par Vietoris pour les espaces métriques compacts.

Pourtant l'importance des outils de la théorie des groupes ne semble toujours pas décelée chez Mayer. On pourrait croire le contraire vu que, à la différence de Vietoris, il commence par définir le ρ-ième groupe d'homologie comme le groupe obtenu comme quotient du groupe des cycles ρ-dimensionnels par le sous-groupe des cycles ρ-dimensionnels homologues à 0 ; mais il ressent le besoin de montrer par la suite que les classes de cycles modulo la relation d'homologie se comportent bien comme un groupe additif[52], comme si la définition par passage au quotient n'était pas totalement satisfaisante. En outre, la vision matricielle guide la plupart des calculs. Mayer raisonne continuellement à l'aide des matrices d'incidence et, avant toute considération, se donne une base des complexes (les facteurs invariants sont, de ce fait, toujours mis en évidence via des changements de base), s'obligeant dans la plupart des cas à montrer que les résultats qu'il obtient sont indépendants de la base considérée. On peut rétrospectivement d'autant plus s'étonner que Mayer ne se soit pas affranchi des matrices que l'article [226] de Vietoris semblait aller dans ce sens, cf. p. 456, Vietoris parlant des nombres de connexité : “Wir haben nur die Definition derselben von der Darstellung durch Matrizes losgelöst.” Il y a d'ailleurs à ce sujet une opposition très nette entre l'article de Vietoris et celui de Mayer : Vietoris n'a aucun usage de l'algèbre linéaire dans [226] alors qu'elle est omniprésente chez Mayer.

5.5 Heinz Hopf

5.5.1 Une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré

Le dernier article que nous étudierons est l'article [118] de Heinz Hopf. Il est important de noter que Hopf est venu pour la première fois à Göttingen en 1926, y rencontrant Paul Alexandroff – avec qui il écrivit plus tard un célèbre manuel de topologie [10] – et bien sûr Emmy Noether, puis y est retourné à plusieurs reprises entre 1926 et 1928. Dans cet article [118] de 1928, Hopf reprend, d'une manière différente, la preuve[53] d'une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré[54]. Entrons plus avant dans le détail de cet article :

[52]Cf. [159] pp. 7-8 : il vérifie que l'addition entre classes est bien définie, qu'elle est commutative, que la classe des cycles d'homologie nulle est le neutre pour cette addition, etc.

[53]Sa preuve originelle fait l'objet d'un article précédent [117].

[54]La formule d'Euler-Poincaré est une généralisation de la célèbre formule d'Euler pour les polyèdres (S-A+F=2). Elle est notamment donnée par Alexander dans [4], p. 316. Selon

celui-ci se divise en trois paragraphes.

Le premier paragraphe énumère des propriétés classiques de théorie des groupes, en particulier des groupes abéliens de génération finie. Hopf s'intéresse notamment aux groupes quotients et à la trace ("Spur") d'un endomorphisme d'un groupe abélien libre de rang fini et établit la relation

$$SG = SH + S\frac{G}{H},$$

où G est un groupe abélien libre de rang fini n, H un sous-groupe de G stable par un endomorphisme f de G et tel que le quotient $\frac{G}{H}$ soit lui aussi libre (il prouve qu'un tel quotient est obligatoirement abélien et de génération finie), SG désignant la trace de f en tant qu'endomorphisme de G, SH la trace de f en tant qu'endomorphisme de H et $S\frac{G}{H}$ la trace de l'endomorphisme induit par f sur $\frac{G}{H}$.

Le deuxième paragraphe traite notamment des définitions liées aux complexes. Considérant un complexe[55] C^n de dimension n , il désigne par T^i_j, $j = 1,...,a^i$, ses simplexes orientés (l'orientation étant définie selon l'ordre des sommets de T^i_j) et nomme "complexe i-dimensionnel dans C^n" toute combinaison linéaire à coefficients entiers des simplexes T^i_j.[56] Ainsi Hopf emploie le mot "complexe" pour deux choses différentes, le complexe C^n étant un complexe au sens d'Alexander et les complexes i-dimensionnels dans C^n étant les i-chaînes au sens d'Alexander dans [4]. Il introduit l'application de bord ρ par sa valeur sur les simplexes et en la prolongeant par linéarité, puis la notion de cycle (complexe annulant le bord). Il définit enfin un "diviseur de bord" ("Randteiler") comme un complexe dont un multiple est un bord et introduit les groupes commutatifs $\mathfrak{L}^i \supset \mathfrak{Z}^i \supset \overline{\mathfrak{R}^i} \supset \mathfrak{R}^i$, respectivement groupe des complexes, groupe des cycles, groupe des diviseurs de bord et groupe des bords i-dimensionnels (les trois derniers ensembles sont bien des groupes pour l'addition d'après les propriétés de ρ). Il en arrive ainsi à définir le i-ème groupe de Betti $\mathfrak{B}^i$ comme étant le quotient $\frac{\mathfrak{Z}^i}{\overline{\mathfrak{R}^i}}$, prouve qu'il s'agit d'un groupe (abélien) libre, et appelle i-ème nombre de Betti (noté p^i) le rang de $\mathfrak{B}^i$. Il montre enfin que ρ induit un isomorphisme entre $\frac{\mathfrak{L}^i}{\mathfrak{Z}^i}$ et $\mathfrak{R}^{i-1}$.

---

les notations du premier paragraphe, cette formule est : $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i P^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha^i$. Elle est au cœur du débat dans [140].

[55] La définition d'un "complexe" n'est pas rappelée mais il faut certainement entendre ici "complexe" au sens d'Alexander dans [4] car Hopf y fait référence dans l'article [117].

[56] "Für jedes i nennen wir die Linearformen in den T^i_j mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten "die in C^n liegenden i-dimensionalen Komplexe.""

Dans le troisième paragraphe il ne reste plus à Hopf, avant de débuter la preuve, qu'à introduire la notion d'application simpliciale entre deux complexes n-dimensionnels C^n et K^n. Il s'agit d'une application de l'ensemble des sommets de C^n dans l'ensemble des sommets de K^n, telle que les images des sommets d'un simplexe de C^n soient les sommets d'un simplexe de K^n. Il montre que toute application simpliciale commute avec ρ puis en déduit que toute application simpliciale induit un homomorphisme entre chacun des groupes $\mathfrak{L}^i$, $\mathfrak{Z}^i$, $\overline{\mathfrak{R}^i}$, $\mathfrak{R}^i$ des complexes respectifs et, en utilisant les résultats des paragraphes précédents, établit la relation

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{B}^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{L}^i$$

comme généralisation de la formule d'Euler-Poincaré (S désignant la trace comme endomorphisme d'une application simpliciale f de C^n dans K^n, où C^n est une subdivision simpliciale de K^n). Il retrouve cette dernière dans le cas particulier où f est l'identité de C^n dans lui-même.

5.5.2 La part de Noether dans le travail de Hopf

Cette brève étude terminée se posent deux questions :

- En quoi l'influence d'Emmy Noether est-elle notable dans cet article de Hopf ?
- En quoi l'article de Hopf est-il original du point de vue de la naissance des groupes d'homologie (et notamment en quoi se distingue-t-il des articles de Vietoris et de Mayer) ?

Nous répondrons à la deuxième question plus tard mais nous pouvons d'ores et déjà répondre à la première question. Citons Hopf lui-même, dans son introduction : "Meinen ursprünglichen Beweis dieser Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel konnte ich im Verlauf einer im Sommer 1928 in Göttingen von mir gehaltenen Vorlesung durch Heranziehung gruppentheoretischer Begriffe unter dem Einfluß von Fräulein E. Noether wesentlich durchsichtiger und einfacher gestalten."[57] L'idée d'introduire des concepts de théorie des groupes lui a donc été fournie par Emmy Noether. Ceci se traduit dans son article par un premier paragraphe totalement dédié à des propriétés de théorie des groupes et définissant les outils lui permettant de simplifier sa première preuve. L'efficacité de cette démarche est telle qu'il n'y a en fin

[57] "J'ai pu, lors d'un de mes cours de l'été 1928 à Göttingen, réécrire de manière bien plus limpide et plus simple ma preuve originelle de cette généralisation de la formule d'Euler-Poincaré en utilisant, sous l'influence d'Emmy Noether, des notions de théorie des groupes."

de compte qu'un seul résultat intermédiaire non trivial qui ne provienne pas de propriétés sur les groupes (il s'agit du fait qu'une application simpliciale commute avec le bord[58]). Il est d'ailleurs intéressant de noter que Hopf n'a pas introduit la notion de groupe d'homologie dans cet article mais celle de groupe de Betti, le groupe de Betti représentant la partie sans torsion du groupe d'homologie (en quotientant par le groupe des diviseurs de bord, non par le groupe des bords, la torsion est supprimée). Les groupes de Betti suffisent au but de l'article de Hopf et, qui plus est, lui permettent de rester dans le cadre simple des groupes abéliens libres de génération finie. Le caractère novateur de cet article de Hopf vient donc moins de la présence des groupes d'homologie que de l'utilisation systématique de la théorie des groupes et, en conséquence, de l'abandon des matrices d'incidence.

D'autres témoignages nous permettent d'étayer les propos de Hopf en confirmant l'importance de Noether dans la genèse de l'article de 1928. Tout d'abord Hopf lui-même, bien des années plus tard, précise dans [126] (p. 12) ce qu'Emmy Noether lui a appris, et l'on peut se rendre compte que l'on retrouve les concepts formulés par Noether presque mot pour mot dans l'article [118] de Hopf[59], à la différence près que dans cet article Hopf considère les groupes de Betti, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des diviseurs de bord, et non les groupes d'homologie, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des bords. Alexandroff, topologue russe, ami de Hopf et de Noether et visiteur régulier de Göttingen de 1923 à 1929, explique quant à lui, dans son éloge d'Emmy Noether [12], que Noether a assisté à ses cours et à ceux de Hopf des étés 1926 et 1927, et insiste sur le fait qu'elle a *immédiatement* remarqué tout le bénéfice qu'il y aurait à introduire les groupes (de complexes, de cycles etc.) en topologie et proposé de définir les groupes de Betti ; Alexandroff ajoute qu'Hopf et lui se rallièrent

[58]Ce point est important. Comme on l'a déjà mentionné plus tôt, il permet d'en déduire qu'une application simpliciale induit un homomorphisme entre les groupes des complexes, des cycles, des diviseurs de bord et des bords. Sont également induits des homomorphismes entre groupes de Betti et d'homologie. Ainsi, étant donné deux complexes n-dimensionnels et une application simpliciale entre eux, sait-on définir les groupes d'homologie/Betti de dimension 0 à n de ces deux complexes et des homomorphismes entre leurs groupes d'homologie/Betti respectifs, induits par l'application simpliciale. De cette manière est mis en évidence l'aspect plus tard dit "fonctoriel" de l'homologie, si important dans le développement futur de la topologie et d'autres domaines des mathématiques. Nous renvoyons au chapitre 6 de [163] pour un développement de l'essor des foncteurs en lien avec Noether et la topologie.

[59]"Es seien X^r die r-dimensionalen Kettengruppen, ∂ die durch die Randbildung bewirkten Homomorphismen $X^{r+1} \to X^r$; dann ist, wie man leicht an einem einzelnen Simplex verifiziert, $\partial\partial = 0$; das bedeutet : das Bild ∂X^{r+1} ist in dem Kern Z^r der Abbildung $\partial : X^r \to X^{r-1}$ enthalten ; die Faktorgruppe $H^r = Z^r / \partial X^{r+1}$ ist die r-te Homologiegruppe".

sans délai à ses propositions et que l'article [118] de Hopf est entièrement basé sur les remarques de Noether[60]. Alexandroff va donc peut-être encore plus loin que Hopf en attribuant absolument toutes les nouveautés conceptuelles de [118] à Emmy Noether et ce, du fait de remarques datant de 1926 ou 1927. Cette affirmation semble cohérente avec les propos de l'abstract de la conférence de Noether évoquée dans le deuxième paragraphe et les souvenirs d'Alexandroff du repas à Blaricum[61] au cours duquel Emmy Noether aurait donné la définition des groupes de Betti de complexes.

L'abstract d'Emmy Noether, étudié dans le deuxième paragraphe, laisse imaginer assez aisément qu'elle avait déjà en sa possession l'idée de la définition des groupes de Betti au début de l'année 1925. L'article [118] de Hopf met en œuvre les idées en germe dans le résumé de Noether : laisser de côté les modules sur les anneaux principaux et placer à la base de la théorie des complexes la notion de groupe. On a déjà dit qu'Emmy Noether n'avait jamais écrit d'article de topologie et que ses seuls propos sur le sujet inscrits dans la littérature mathématique semblent être ceux de l'abstract. Néanmoins on peut se rendre compte que la topologie n'était pas totalement absente des pensées d'Emmy Noether, ce qui explique qu'elle ait pu en parler en conférence et proposer une avancée conceptuelle notable dans un domaine qui n'était pas le sien. L'origine des réflexions de Noether en lien avec la topologie semble provenir des visites régulières d'Alexandroff à Göttingen à partir de mai 1923, qui furent accompagnées de nombreuses discussions avec Noether. Celle-ci sembla montrer un réel intérêt aux investigations d'Alexandroff[62].

Dès lors, on peut penser qu'Emmy Noether a répété ses remarques à plusieurs reprises, le temps que certains topologues se persuadent de leur intérêt. Peu d'occasions se sont présentées à elle vu que la topologie n'était pas un sujet d'étude à Göttingen. Il y eut d'abord le séjour chez Brouwer lors des vacances de Noël 1925, avec une présence importante de topologues (Alexandroff, Brouwer, Menger, Vietoris... cf. [11] p. 323), puis les visites de Hopf à Göttingen à partir de l'été 1926 et les cours donnés dès lors par

[60] Cf. [12] p. 9 : "In the summers 1926 and 1927 she went to the courses on topology which Hopf and I gave at Göttingen. (...) she immediately observed that it would be worthwile to study directly the groups of algebraic complexes and cycles (...), she suggested immediately defining the Betti group (...) she noticed how simple and transparent the proof of Euler-Poincaré formula becomes if one makes systematic use of the concept of a Betti group."

[61] Cet épisode a déjà été évoqué en introduction, note 6.

[62] Cf. [11] p. 299 : "We [Alexandroff et Urysohn] constantly met Emmy Noether on a relaxed basis and very often talked to her, about topics both in ideal theory, and in our work, which had caught her interest at once." et p. 316 : "We were constantly meeting Emmy Noether on her famous walks, which were first called algebraic and after our arrival came to be called topological algebraic."

Alexandroff et Hopf furent pour Noether l'occasion d'appliquer ses idées en situation. On comprend mieux ainsi que Noether ait pu faire des remarques *immédiatement* – comme le fait remarquer de façon insistante Alexandroff dans [12] – à l'occasion de leurs cours vu qu'elle ne faisait que leur expliquer des concepts qu'elle avait déjà formulés depuis plus d'un an. Alexandroff les avait manifestement déjà entendues mais probablement sans en sentir alors toute la portée ou sans vouloir se consacrer aux perspectives ouvertes par Noether, tandis que pour Hopf il s'agissait d'une totale découverte.

5.6 Vietoris, synthèse de diverses influences ?

On a pu relever de fortes distinctions lors de l'étude, au cours des paragraphes 3, 4 et 5, des articles de Vietoris, Mayer et Hopf. Ainsi l'article [226] de Vietoris, première occurrence dans la littérature mathématique de la notion de groupe d'homologie, a pour idée directrice la généralisation en dimension finie quelconque des concepts de Brouwer dans [29] sur l'homotopie. De ce fait l'intuition géométrique mène les réflexions et les matrices d'incidence sont abandonnées car ne pouvant décrire les objets considérés par Vietoris. Les nombres de Betti et de torsion n'ayant en général pas d'existence pour les objets considérés par Vietoris, il leur faut un substitut, et la notion de groupe d'homologie s'impose alors naturellement. Il n'y a cependant aucune utilisation d'outils de théorie des groupes, et même une présence très faible d'une terminologie propre aux groupes, l'usage de la notion de quotient, par exemple, étant inexistant.

L'influence de Brouwer sur l'article [226] de Vietoris étant prépondérante, on peut mentionner quelques aspects du travail de Brouwer afin d'expliquer la démarche de Vietoris et ce qui la distingue de celle de Noether et de Hopf.

5.6.1 L. E. J. Brouwer

Il est difficile d'évaluer ce que Brouwer connaissait et pensait des travaux d'Emmy Noether. On sait cependant qu'il l'a rencontrée en 1912 et l'a très probablement revue plusieurs fois par la suite car il se rendait régulièrement à Göttingen[63]. En outre, l'invitation à séjourner chez lui lors de l'hiver 1925 lancée à Noether indique qu'ils étaient certainement en bons termes.

Etant donné les propos de Noether (cf. note 60) lors du repas chez Brouwer, il peut paraître assez surprenant que les méthodes développées par Vietoris et celles encouragées par Noether soient si éloignées l'une de l'autre. On

[63]Cf. [88] p. XIII : "In the summer of 1909 he seems to have met Hilbert, and from 1911 onwards he made regular visits to Göttingen."

peut l'expliquer notamment par la fidélité de Brouwer à ses propres conceptions : l'esprit de l'intuitionnisme et celui de l'algèbre moderne sont pour le moins inconciliables. En outre, le travail de Brouwer au début des années 1910 montre bien que l'idée de l'introduction de concepts algébriques lui était alors étrangère[64] et si l'on part du principe que l'activité de Brouwer fut assez éloignée de la topologie à partir de 1913 et que l'algèbre n'a jamais été un de ses domaines de recherche, on peut aisément comprendre son manque de sensibilité aux innovations de Noether.

L. E. J. Brouwer écrivit entre 1910 et 1913 une série d'articles qui firent date autant par les résultats qu'ils contiennent que par la nouveauté des méthodes mises en œuvre – qui purent être réemployées efficacement par la suite par d'autres topologues. Il fut notamment le premier à considérer ce qu'on appelle maintenant des applications homotopes[65], d'ailleurs présentes dans l'article [29] mentionné plus haut. Dans ses travaux, l'importance de l'intuition géométrique et même de l'approche géométrique est absolument manifeste, et confirmée par ses propres paroles : "It was my main intention to demonstrate that it is possible and desirable to give priority to the geometrical method also in parts of mathematics where this has not yet been realized."[66]

Cet attachement à un traitement géométrique des problèmes mathématiques ainsi qu'une méconnaissance ou un désintéressement volontaire ont fait que Brouwer ne s'est pas consacré à l'homologie alors même que les outils qu'il avait introduits ont ensuite permis un traitement satisfaisant de questions soulevées par Poincaré[67]. En fait, Brouwer s'est peu à peu détourné de la topologie à compter de 1913 du fait tout d'abord de la première guerre mondiale puis surtout de son intérêt grandissant pour les questions de fondation des mathématiques et le développement de l'intuitionnisme. Ce n'est finalement qu'en 1923 que Brouwer retrouva – mais seulement pour un temps et surtout indirectement, en dirigeant les travaux de Menger, Alexandroff et Vietoris – un attrait supérieur à la topologie, relancé, semble-t-il, par les

[64] L'article [29] mentionné dans le troisième paragraphe, notamment, se prêtait parfaitement à l'introduction du langage des groupes, chaque lacet ainsi que tous ceux qui lui sont homotopes représentant un seul et même élément du groupe fondamental, mais il en est pourtant totalement absent.

[65] Cf. [30].

[66] Cf. [31] p. 120.

[67] Selon Dirk van Dalen, dans [47] p. 956 : "Brouwer stubbornly stuck to his geometrical approach, either unaware of the potential of homology as initiated by Poincaré, or just preferring the geometric attack." Voir aussi le jugement de Dieudonné, cf. [55] p. 161 : "nobody understands why Brouwer never mentionned these papers [of Poincaré], nor tried to apply his fundamental discovery of simplicial approximation to bring to life the theorems guessed by Poincaré (as Alexander did a little later)."

résultats d'un jeune topologue russe prometteur – mais décédé peu après – Pavel Urysohn.

5.6.2 Le rôle d'Alexandroff

L'influence de Brouwer ne s'est pas limitée à celle que nous avons mis en évidence au sujet de Vietoris. Alexandroff avait également rejoint Brouwer à Blaricum en mai 1925, soit peu de temps avant l'arrivée de Vietoris. Si Alexandroff s'est rendu à Blaricum, c'est qu'il était lui-même en train de mener une réflexion visant à adapter les propriétés et concepts essentiels de la topologie combinatoire à des variétés générales. Pour ce faire, il avait commencé par poser les fondations d'une topologie des variétés à l'aide de la théorie des ensembles[68]. Son idée consistait à approcher des éléments n-dimensionnels par des ensembles finis de "tétraèdres" n-dimensionnels, les tétraèdres en question consistant en fait simplement en la donnée de $n+1$ points jouant le rôle de leurs sommets.

Le procédé d'approximation utilisé par Alexandroff est clairement inspiré de celui de Brouwer, de même que celui qu'a utilisé Vietoris pour définir des simplexes dans un espace quelconque. Ce n'est en fait pas une coïncidence ; Vietoris reconnaît dans [225] l'apport fructueux de conversations avec Alexandroff, donc l'influence de celui-ci, pour son approche des espaces métriques.

McLarty, dans [163], soulève ce problème des échanges entre Alexandroff et Vietoris pour ce qui est de l'indépendance de Vietoris vis-à-vis des idées de Noether au sujet de la création des groupes d'homologie. Le point clé est que l'on peut, comme McLarty l'explique dans [163], avancer qu'une motivation au passage des invariants numériques aux groupes d'homologie est la volonté de formuler des résultats non seulement pour les espaces, mais aussi pour les application continues entre les espaces[69]. L'article de 1928 de Hopf illustre d'ailleurs très bien cette idée. Or, celle-ci s'apparente clairement au projet d'Emmy Noether d'édifier l'algèbre sur la base de la théorie des ensembles, en oubliant la nature des objets et les opérations algébriques qui les composent, pour décrire les structures situées au-dessus des objets à l'aide de certains sous-ensembles et de certaines applications (des morphismes pour ladite structure)[70]. Comme l'influence d'Emmy Noether sur Alexandroff est

[68]Cf. son article [7] achevé peu avant sa venue à Blaricum.

[69]Bill Lawvere semble même affirmer que cette motivation est la principale raison de l'adoption des groupes d'homologie au détriment des invariants numériques. Ralf Krömer argumente en détail en faveur de ce point de vue dans [138] (en 2.1.2).

[70]Pour les groupes par exemple, les sous-ensembles sont les sous-groupes normaux et les morphismes les morphismes de groupes. On trouvera plus de détails dans l'article [163] de

indéniable, qu'Alexandroff chercha à utiliser ses nouvelles bases de la topologie pour établir des théorèmes sur les applications continues entre espaces topologiques[71], et que l'on trouve le même genre de théorèmes dans l'article [226] de Vietoris, on peut être tenté de conclure à l'influence de Noether – ou en tout cas de son approche de la topologie, via Alexandroff – sur Vietoris.

Ces divers jeux d'influence rendent la situation bien complexe. Néanmoins, il ne nous semble pas que l'on puisse remettre en cause l'indépendance de Vietoris du fait des arguments précédents. Même si les motivations algébriques, et à la rigueur topologiques, de Noether sont claires, la façon dont ses contemporains ont pu se les approprier, surtout en un temps si court, l'est beaucoup moins. Si Alexandroff avait une idée précise des objectifs algébriques de Noether et s'est efforcé de les transposer à la topologie, ce n'est probablement pas le cas de Vietoris. Alexandroff a fait la synthèse de l'influence de Brouwer et de celle de Noether alors que Vietoris a été bien plus profondément influencé par Brouwer.

Lorsqu'on souligne la volonté de Noether de se concentrer sur les structures et les morphismes entre structures, donc sur des propriétés de type fonctoriel, c'est évidemment parce qu'on y décèle dans le prolongement de celle-ci la naissance de la théorie des catégories. Cette remarque est donc extrêmement intéressante mais il apparaît difficile de retrouver dans le travail de Vietoris des traces de cette volonté de Noether. Le résultat le plus ancien retenu par Ralf Krömer concrétisant la volonté d'étudier des applications en lien avec l'homologie est la généralisation de la formule d'Euler-Poincaré par Hopf (que nous avons nous-mêmes retenue comme premier emploi efficace des préceptes de Noether). Comme nous l'avons vu, celle-ci s'est faite dans le cadre des complexes simpliciaux classiques et n'a donc absolument pas nécessité les considérations topologiques d'Alexandroff et de Vietoris. Le travail de Vietoris nous semble réellement de ne pas avoir besoin des idées de Noether, de même que les idées de Noether n'ont pas besoin de son travail pour être légitimées. Alexandroff a pu aider Vietoris à la création de l'homologie pour des espaces compacts mais, concrètement, les idées d'approximation remontant aux premiers travaux de Brouwer nous semblent de loin les plus importantes dans le travail de Vietoris, et l'on imagine de toute façon mal qu'Alexandroff ait pu avoir plus d'influence que Brouwer sur Vietoris.

McLarty.

[71] Comme dans [8].

5.7 Conclusion

L'article [159] de Mayer se trouve lui aussi assez éloigné des idées de Noether et de la concrétisation qu'en a donnée Hopf. Son principal intérêt est de fournir la première axiomatisation des groupes d'homologie, affirmant ainsi l'importance de ce concept. Mais, par certains traits, cet article est un retour en arrière par rapport aux avancées de Vietoris. Les groupes d'homologie définis par Mayer sont moins généraux que ceux considérés par Vietoris car il considère uniquement des complexes de type fini. Alors que l'outil matriciel avait été, certes probablement par obligation, abandonné par Vietoris, il est chez Mayer essentiel. Enfin, l'utilisation de méthodes de théorie des groupes est à peu près totalement absente.

Les motivations de Vietoris sont bien différentes de celles de Hopf et Noether. Noether procède à une réévaluation de l'ordonnancement des notions et considère que la théorie des groupes doit être placée à la base de la théorie des complexes et doit ainsi fournir les outils permettant de remplacer dans les calculs les matrices d'incidence peu commodes. Il est plutôt normal que Noether ait proposé une telle approche conceptuelle sans l'étayer par un exemple d'application concret. D'une part parce qu'elle n'était pas spécialiste de topologie ; d'autre part car sa proposition d'un intérêt des groupes en homologie n'est qu'une expression d'un principe général la guidant, consistant à poser des fondations autant que possible générales et abstraites (c'est-à-dire notamment en ayant abstrait les seules propriétés pertinentes requises pour la définition des objets d'étude). Dans le cas de la topologie, il lui semble que les groupes doivent être les objets de base des considérations, et non plus les modules ou les formes linéaires ou les nombres de Betti et de torsion. A titre d'exemple similaire, elle fit la connexion quelques années plus tard entre la théorie des représentations et des algèbres associatives via l'étude d'anneaux non commutatifs (cf. [172]). L'article [118] de Hopf concrétise les idées de Noether : il isole les définitions et propriétés propres à la théorie des groupes qui lui seront utiles et définit les complexes de façon à pouvoir utiliser facilement les concepts ainsi introduits. Il démontre ainsi l'intérêt pratique de l'introduction de la théorie des groupes en topologie, alors qu'elle pouvait jusqu'alors être seulement considérée comme un choix esthétique ou philosophique.

Cependant la première démonstration de la pertinence des groupes en topologie n'est pas le fait de Hopf, mais de Vietoris. Les mérites de Hopf et de Vietoris sont d'ailleurs bien distincts, et complémentaires. Avec l'article de 1928, Hopf obtient la simplification d'une preuve via l'utilisation de la théorie des groupes abéliens libres et laisse entrevoir une approche facilitée de l'homologie grâce aux outils de la théorie des groupes. Mais il reste dans le cadre très classique des complexes combinatoires et ne démontre aucun résultat nouveau[72]. Vietoris, par contre, sort du cadre combinatoire et décide d'étudier l'homologie d'espaces jusque-là hors de portée, ce qui l'amène à définir la notion de groupe d'homologie. Les groupes d'homologie s'imposent dans son étude de manière nécessaire et permettent à la topologie d'étendre son domaine d'investigations. Cela dit, alors même que les groupes s'imposent naturellement dans le travail de Vietoris, ceux-ci ne sont pas assumés autant qu'ils l'auraient été par Hopf ou Noether. En effet contrairement à Hopf, Vietoris ne se munit pas d'une assise théorique via des rappels de théorie des groupes et, comme nous l'avons déjà dit, la notion de quotient semble être traitée avec une certaine défiance.

Si nous en revenons pour finir au problème plus large évoqué en introduction de l'algébrisation de la topologie, les réalisations de Hopf et de Vietoris ont toutes deux une grande importance et sont complémentaires. En effet, si l'on suit Klaus Volkert [228] pour qui les raisons de l'algébrisation de la topologie sont d'une part la simplification et la clarification de la théorie et d'autre part la généralisation au cas de génération non finie[73], il apparaît clairement que les idées de Noether et les travaux de Hopf sont à la source de la première raison tandis que Vietoris est à l'origine de la seconde.

Certains traits historiques de la genèse de la notion de groupe d'homologie ont une portée qui excède cette genèse proprement dite : les oppositions entre différentes traditions mathématiques, leur influence sur l'appréciation du travail d'autrui, les problèmes de diffusion du savoir mathématique et les échanges informels entre membres de la communauté mathématique sont autant de facettes de la communication des idées en mathématique dont certains traits caractéristiques sont bien illustrés par la confrontation entre Noether et Vietoris.

Comme cela a déjà été dit, c'est probablement lors de ses discussions avec Alexandroff au cours des rituelles "promenades de topologie algébrique" à Göttingen qu'Emmy Noether a commencé à développer une nouvelle conception de la topologie, plaçant la théorie des groupes à la base des in-

[72]Il avait déjà, dans [117], présenté sa généralisation de la formule d'Euler-Poincaré en utilisant des méthodes combinatoires classiques, sans l'usage des groupes d'homologie. La nouveauté de cette généralisation vient de ce qu'elle exprime une propriété protant sur une application continue entre complexes. L'article [118] reformule cette généralisation et la prouve plus simplement, à l'aide des groupes de Betti.

[73]Comme illustration de la pertinence de ce second critère, on pourra remarquer qu'en 1930 van der Waerden publie une sorte d'état des lieux de la topologie (cf. [229]) intitulé *Kombinatorische Topologie*, dont l'objet d'étude est selon lui les complexes formés à partir d'un nombre fini de simplexes, et qui intègre les travaux de Hopf et la notion de groupe d'homologie.

vestigations, ce qui l'a menée à définir les groupes de Betti, d'homologie, etc. Outre sa conférence de janvier 1925 devant la Göttinger Mathematische Gesellschaft, où ses idées sur le sujet n'étaient peut-être pas encore totalement clarifiées, elle a fait part de ses nouvelles conceptions et définitions lors du repas de décembre 1925 chez Brouwer puis lors des cours d'Alexandroff et Hopf à Göttingen à partir de l'été 1926.

Vietoris est le premier à avoir donné une définition noir sur blanc des groupes d'homologie et Mayer, toujours avant l'article [118] de Hopf, l'a reprise dans le cadre moins général des complexes de type fini, en proposant une axiomatisation et en affirmant l'intérêt. Quoique Vietoris affirme n'avoir pas été au courant des développements de Noether en topologie algébrique (et confirme la même ignorance de la part de Mayer), sa présence lors du repas chez Brouwer (et même probablement lors de l'ensemble du séjour de Noether) remet en cause cette affirmation. Cependant, à part peut-être en ce qui concerne la notion de groupe d'homologie elle-même, on a pu voir que Noether n'a pas eu d'influence sur le travail de Vietoris, qui est resté fidèle aux idées de Brouwer.

La quasi-absence d'exploitation des idées de Noether par Vietoris illustre bien les difficultés pour les tenants ou héritiers de deux traditions mathématiques différentes à échanger. En outre s'est ajoutée une difficulté d'ordre matériel, due au fait que les articles n'accédaient pas toujours à une grande diffusion par-delà les frontières. Ainsi on ne peut être d'accord avec Jean Dieudonné qui, s'étonnant de la précocité de l'article de Mayer, pense, en dépit du fait qu'aucune référence à Noether n'y est faite, qu'"à cette époque l'esprit de 'l'algèbre moderne' s'était propagé à plusieurs universités allemandes grâce aux efforts de E. Artin, R. Baer, R. Brauer, H. Hasse, W. Krull and J. Von Neumann"[74] et qu'"il n'est pas impossible qu'il ait aussi atteint Vienne."[75] Ce point de vue est en effet contesté par Mac Lane [152] et surtout par Vietoris lui-même[76] qui souligne au contraire la difficulté que les résultats de Vienne avaient à atteindre l'Allemagne et le fait que ni lui ni Mayer n'étaient au courant des idées de Noether sur la topologie algébrique[77]. Notons aussi que cette difficulté manifeste que pouvait rencontrer à l'époque

[74]"by that time the spirit of 'modern algebra' had spread to many German universities under the efforts of E. Artin, R. Baer, R. Brauer, H. Hasse, W. Krull and J. Von Neumann", [54] p. 6.

[75]"it is not unlikely that it could also have reached Vienna", [54] p. 6.

[76]Cf. [113] pp. 61-62.

[77]Cette dernière affirmation est, comme nous l'avons vu, probablement à nuancer, mais néanmoins nous n'avons trouvé aucune trace d'une rencontre entre Noether et Vietoris, du moins au cours de la période qui nous intéresse, si ce n'est en décembre 1925, chez Brouwer.

la diffusion des connaissances mathématiques met en valeur l'importance du rôle des échanges informels dans l'adoption progressive des concepts de théorie des groupes en topologie[78]. En effet, les discussions lors des "promenades de topologie algébrique" entre Noether et Alexandroff et les remarques de Noether lors des cours de Hopf et d'Alexandroff sont autant de moments cruciaux dans l'émergence de cette nouvelle conception de la topologie.

Il se trouve que les travaux que nous avons étudiés de Vietoris et de Mayer se sont fait connaître d'Alexandroff et de Hopf par le système de "review" pour les revues. Ainsi possédons-nous des traces de l'appréciation des travaux de Vietoris et de Mayer par Alexandroff et Hopf. L'article [226] de Vietoris et l'article [159] de Mayer ont été relus respectivement par Alexandroff et Hopf pour le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (de 1927 et 1929 respectivement). Hopf semble trouver un véritable intérêt au travail de Mayer. Il note que les complexes y sont considérés de façon abstraite et que les ensembles de complexes, de cycles, de classes d'homologie, y sont considérés comme des groupes abéliens, mais il ne souligne cependant pas l'introduction des groupes d'homologie. Hopf considère donc la présence de la théorie des groupes dans l'article de Mayer comme un fait important, bien plus que la seule définition des groupes d'homologie, alors même que l'attachement de Mayer à la vision matricielle limite grandement l'utilisation qu'il aurait pu faire des outils de la théorie des groupes. L'introduction des groupes d'homologie dans l'article de Mayer semble d'ailleurs l'avoir tellement peu marqué qu'il écrira en 1964 dans [126], p. 12 : "ich weiss nicht einmal, ob der Begriff der "Homologiegruppe" schon irgendwo schwarz auf weiss in der Literatur vorgekommen war. Ich selbst habe sie zum ersten Mal in meiner Note "Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel" (...) benutzt."[79], ce qu'il nuancera en note de [118] dans ses Selecta : "Die obige Note ist wohl die erste Publikation gewesen, in der die heute geläufige, von EMMY NOETHER stammende gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie zur Geltung kommt"[80]. Le commentaire d'Alexandroff au sujet

[78]Remarquons d'ailleurs que malgré les nouveaux outils d'information à disposition, les échanges oraux directs continuent, aujourd'hui encore, de structurer pour une part non négligeable le développement de la recherche.

[79]"je ne sais pas si la notion de "groupe d'homologie" était déjà apparue noir sur blanc dans la littérature. Je l'ai moi-même employée pour la première fois dans ma note "Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel"".

[80]"Il semble bien que la note ci-dessus soit la première publication dans laquelle le point de vue l'homologie à l'aide de la théorie des groupes, dû à EMMY NOETHER et aujourd'hui familier, a été mis en valeur", cf. [125] p. 183. Par cette phrase, Hopf ne se prononce plus comme c'était le cas dans la citation précédente sur la première apparition de la notion de groupe d'homologie mais souligne le fait que son article [118] est le premier à privilégier et à utiliser efficacement les concepts de théorie des groupes en topologie, ce

de l'article de Vietoris est encore plus surprenant : il ne fait que mentionner la généralisation des notions de l'article [29] de Brouwer et le résultat principal de l'article sans même relever l'introduction des groupes d'homologie. Ainsi semble-t-il bien que pour Alexandroff et Hopf la véritable avancée conceptuelle est la refonte de la topologie basée sur la théorie des groupes, mais la définition de la notion de groupe d'homologie et l'appréhension par Vietoris d'objets comme les espaces métriques compacts, qui dépassent le cadre alors habituel des complexes, sont vraisemblablement à leurs yeux d'une importance qu'on peut juger rétrospectivement comme injustement faible.

L'essor de l'algèbre moderne est un des événements majeurs du vingtième siècle en mathématiques. Son apport indéniable dans la recherche actuelle ne doit pas faire oublier que l'adoption par les mathématiciens de son esprit ne fut pas automatique. Ainsi Hermann Weyl par exemple, en 1931, exprimait-il son scepticisme au sujet des méthodes abstraites[81], et ce n'est qu'un exemple parmi tant d'autres.

L'algébrisation de la topologie, étant le fait pour une part conséquente de personnes et d'idées liées à l'algèbre moderne, s'est heurtée un temps au sentiment qu'elle était superflue[82]. Les résistances encore rencontrées au début des années 1930 à l'usage de la théorie des groupes en topologie, et ce parmi d'illustres mathématiciens, donnent à penser que l'article de Hopf, malgré ses mérites et la démonstration que la théorie des groupes est un cadre parfaitement adapté à la topologie combinatoire, a offert un gain pratique trop limité pour mener seul à l'algébrisation de la topologie. Et ceci met, par contraste, encore une fois en valeur l'apport de Vietoris dont l'article a offert un cadre d'investigations plus large à la topologie, à l'aide de la notion de groupe d'homologie, bien que sans mettre en œuvre les idées de l'algèbre moderne.

qu'on ne peut contester.

[81] cité par Alexandroff dans [12], p. 4 : "I should not pass over in silence the fact that today the feeling among mathematicians is beginning to spread that the fertility of these abstracting methods is approaching exhaustion."

[82] Pour Lefschetz, en 1930, utiliser la théorie des groupes en topologie n'est qu'une question de terminologie... Cf. [143] : "Indeed everything that follows in this section can be, and frequently is, translated into the theory of groups. It is of course a mere question of a different terminology".

Chapitre 6

Homotopie et deuxième groupe d'homologie

En 1942 paraît aux Commentarii Mathematici Helvetici un article de Heinz Hopf, intitulé *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe* [121], qui marque une étape essentielle dans le développement de la topologie algébrique. Sans même analyser le contenu de cet article, son importance est facilement appréhendable. Il n'y a qu'à consulter, par exemple, le rapport élogieux qu'en établit Hassler Whitney pour la revue *Mathematical Reviews.* Les premières lignes sont parlantes :

"This paper is, in the reviewer's mind, one of the most important contributions to combinatorial topology in recent years. It gives far reaching results concerning the relations between the fundamental group, the first and second homology and cohomology groups, and the product between these groups, with beautiful and simple methods. The work is based on some new constructions in groups which are undoubtedly of real significance by themselves."

L'intérêt que Whitney voit dans cet article est multiple. Il en loue les résultats et leur portée mais également la beauté et la simplicité des méthodes employées. De prime abord, nous retiendrons particulièrement le fait que Whitney parle encore de topologie "combinatoire"[1], alors que les remarques topologiques de Noether et Hopf dont nous avons précédemment souligné le caractère novateur et l'appartenance à la mouvance de l'algèbre moderne, ont déjà une quinzaine d'années. Ainsi, en 1942, l'importance d'un traitement algébrique de la topologie ne s'est pas encore imposé à tous. Mais, comme nous le verrons, cet article de Hopf accorde une place très forte à l'algèbre au sein de la topologie, avec des conséquences qui semblent au moins aussi cruciales

[1] C'était la terminologie standard à l'époque, ayant remplacé effectivement le peu commode "Analysis Situs".

dans le développement de la topologie que celles que l'on peut accorder aux remarques de Noether.

Hopf lui-même avait bien conscience de l'importance de ses découvertes. Il voulut parler de son travail en cours dès 1940 ; le 14 mai de cette année-là, il envoya le résumé d'un exposé intitulé “Relations between the Fundamental Group and the Second Betti Group” à l'Université du Michigan[2]. Hopf incorpora également le résultat principal du futur article [121] dans un rapport rédigé en hommage aux soixante ans de Brouwer, fêtés en 1941.[3] Pour cet hommage à l'auteur d'innovations déterminantes pour la topologie, Hopf retint quelques développements de grands noms de la discipline, comme Stiefel, Eckmann, Pontrjagin, Gysin, etc., tous postérieurs à 1935. Le dernier développement choisi n'est autre que celui dont fait l'objet son article [121], pourtant non encore publié. Ceci illustre l'importance qu'il lui sembla reconnaître dans ce travail ainsi que la confiance qu'il avait dans le fait qu'il serait apprécié par la communauté mathématique.

Dans *Origins of the cohomology of groups* [151], Mac Lane, parmi les seize points en lesquels il divisa son étude, réserva le deuxième (le premier étant l'introduction) uniquement à l'article [121] de Hopf. Ce traitement de faveur témoigne du rôle fondamental qu'il prête à cet article dans la naissance de la cohomologie des groupes. Comme Mac Lane le montre bien, cet article a eu une influence immédiate sur plusieurs mathématiciens travaillant indépendamment les uns des autres[4]. Le travail de Hopf a, qui plus est, une importance toute particulière pour Mac Lane car, comme nous le montrerons plus tard, il inspira à Eilenberg et Mac Lane la création de l'homologie des

[2]Une conférence de topologie, intitulée *Lectures in Topology*, eut lieu à l'Université du Michigan en 1940. En 1935 avait eu lieu à Moscou la 'Première Réunion Topologique International' (sic) (cf. [133] p. 840), rassemblement des plus grands topologues de l'époque, sur le modèle des Congrès Internationaux des Mathématiciens. Hopf y était présent, de même que lors du 'Colloque sur quelques questions de Géométrie et de Topologie' tenu à Genève peu après. Un autre grand rassemblement de topologues avait semble-t-il été prévu à Moscou quatre ans après la première édition, mais le contexte géopolitique le rendit impossible. La conférence de l'Université du Michigan fut en fait le premier grand événement international en topologie depuis le colloque de Genève – toutes ces informations sont tirées de [133] – et on comprend sans peine que Hopf ait pu vouloir s'y rendre. Il espérait sans doute exposer ses travaux en cours à cette occasion. Son résumé est parvenu trop tard aux organisateurs mais fut néanmoins publié en 1941 dans les actes de la conférence [120]. Pour l'essentiel, ce résumé présente le résultat principal de l'article à venir, mais en des termes qu'il ne retint pas entièrement dans la version finale. Il est à noter que l'article [121] fut, lui, soumis le 12 septembre 1941.

[3]Les troubles de l'époque firent cependant que ce texte ne fut sous presse qu'en 1946 [124].

[4]Il retient quatre études indépendantes comme directement influencées par le papier de Hopf, et le reconnaissant. Il s'agit, dans l'ordre chronologique, de [67], [123], [87] et [59].

groupes.

Mac Lane énonce les résultats établis antérieurement à l'article de Hopf, qui sont en lien direct avec celui-ci. Il retient entre autres la construction par Schur de son célèbre multiplicateur[5] et la juge analogue à celle développée par Hopf dans [121]. Il précise que Hopf a, durant ses études à Berlin, été assistant de Schur. Bien que discrète, la façon qu'a Mac Lane de présenter le tout laisse indiquer qu'il est perplexe de ne voir aucune référence de la part de Hopf aux travaux de Schur[6]. Lorsqu'on compare néanmoins les deux études, on peut imaginer sans peine que la connexion entre la construction de Schur et sa construction n'ait pas été évidente pour Hopf, à supposer d'ailleurs qu'il la connût, ce qui n'est pas si sûr car, comme nous l'avons déjà dit par ailleurs, l'article [204] de Schur n'eut pas une descendance prolixe. Mac Lane lui-même a eu un comportement un peu étrange au sujet du lien entre le multiplicateur de Schur et la cohomologie des groupes étant donné qu'il est assez évident, lorsqu'on a connaissance de l'article [204] de Schur, que le second groupe de cohomologie d'un groupe G à coefficients dans $\mathbb{C}$, tel que défini par Eilenberg et Mac Lane, est exactement le multiplicateur tel que défini par Schur ; mais l'article de Schur n'est pas mentionné par Mac Lane dans son travail en collaboration avec Eilenberg sur la cohomologie[7] ([71] et [72]).

Mac Lane indique aussi à raison la relation entre les investigations de Hopf et les travaux de Hurewicz sur l'homotopie supérieure, et l'importance que celle-ci aura par la suite. Mais s'il voit cette relation, il affirme également que Hopf, lui, ne la mentionne pas dans son article de 1942.[8] Or, s'il est vrai que le lien entre son article et l'étude par Hurewicz de l'homotopie en dimension supérieure est surprenamment peu présente dans ses lignes, elle n'en est pour autant pas absente[9]. Qui plus est cette relation est également

[5]Cf. [204]. Cette construction intervient dans le cadre des extensions de groupes ; voir chapitre 2.

[6]"Hopf, while a student in Berlin, had been an assistant to Schur, but his 1942 paper does not mention the connection with the multiplicator."

[7]Pour avoir lu un certain nombre d'articles de la même époque écrits par Mac Lane seul, nous avons pu nous rendre compte qu'il est en général complet dans ses références. A titre d'exemple, dans [71] et plus en détails dans [72] justement, Eilenberg et Mac Lane mentionnent un lien entre le groupe de cohomologie en dimension 3 et l'article [220] pourtant peu connu d'Oswald Teichmüller, et publié dans la revue pro-Nazie *Deutsche Mathematik*. L'omission du travail de Schur est d'autant plus étrange que que Clifford et lui parlent du multiplicateur dans leur article commun de 1941 [42]...

[8]Cf. [151] p. 3 : "In his 1942 paper, Hopf did not mention a connection with the higher homotopy groups, but this connection soon played an important part".

[9]Elle est notamment affichée clairement en fin de l'introduction (cf. [121] p. 260) et on la retrouve également dans la note 24 p. 282.

mentionnée par Hopf dans le résumé envoyé à l'Université du Michigan ainsi que dans le supplément [122] à cet article de 1942.

Les travaux de Hurewicz sur l'homotopie supérieure ont eu, et ceci est clairement reconnu par Hopf lui-même, une influence réelle sur ses recherches. Nous nous proposons donc, dans la première partie de ce chapitre, de présenter ces travaux et dégager les points les plus importants dans l'optique de l'analyse de l'article [121] de Hopf.

6.1 Sur l'homotopie

Nous introduisons tout d'abord le lecteur aux notions de groupe fondamental et d'homotopie, car elles précèdent, à la fois historiquement et conceptuellement, celle d'homotopie supérieure.

Autant les recherches topologiques de Poincaré que l'histoire du concept d'homotopie ont déjà été traitées de manière détaillée par d'autres études d'histoire des sciences[10] ; nous y renvoyons donc le lecteur désireux d'en savoir plus sur ces sujets et nous abstenons d'entrer, car ce ne pourrait être que de façon incomplète et redondante, dans une analyse précise de l'évolution des concepts et définitions d'homotopie et de groupe fondamental. Nous souhaitons simplement donner quelques points de repère.

6.1.1 Le groupe fondamental

Le "groupe fondamental" d'un espace est un objet essentiel en topologie. Il porte également le nom de "groupe de Poincaré", en référence à celui qui l'a introduit.

La classification des surfaces fermées – c'est-à-dire les variétés de dimension 2, compactes, et sans bord – avait été réalisée au dix-neuvième siècle[11]. En topologie, classifier signifie caractériser à homéomorphisme près. Dans le cas des surfaces fermées, il avait été établi que le fait d'être orientable ou non et la caractéristique d'Euler permettent une telle classification. Le problème se prolongeait naturellement au cas des variétés tridimensionnelles. Poincaré introduisit d'abord les nombres de Betti en reprenant et précisant la notion

[10] Citons [223] pour une histoire du concept d'homotopie et [157] pour des réflexions épistémologiques inspirées par la théorie de l'homotopie. Pour ce qui est de Poincaré, nous indiquons [195] pour une analyse du contenu de ses articles de topologie et [228] pour une étude détaillée des travaux de Poincaré dans le cadre de l'histoire de la classification des variétés tridimensionnelles.

[11] On pourra en trouver l'histoire dans [184] et dans [228].

d'"ordre de connexion" d'Enrico Betti[12]. Il considéra ensuite de nouvelles quantités, les nombres de torsion, qui lui servirent à montrer que les nombres de Betti sont insuffisants à caractériser une variété[13]. Les nombres de Betti et de torsion sont des invariants topologiques ; ils peuvent donc être utilisés pour montrer que deux variétés ne sont pas homéomorphes. Cependant ils s'avèrent insuffisants pour caractériser une variété ; c'est ce que Poincaré démontra dans le *Cinquième complément* à l'aide du groupe fondamental, un autre invariant. Ainsi Poincaré introduisit-il trois invariants topologiques, sans pour autant pouvoir se prononcer clairement sur une caractérisation des variétés tridimensionnelles, vu que ces recherches à ce sujet se concluent par une fameuse conjecture[14]. Ces invariants sont ceux dits 'classiques' ; ils sont les trois invariants primordiaux que les topologues ont utilisé durant les trente à quarante années suivant leur introduction par Poincaré. Les nombres de Betti et de torsion sont aisément calculables à l'aide des matrices d'incidence[15] et, bien que ceci soit en général long et malaisé, il est possible de calculer le groupe fondamental d'une variété[16].

La définition initiale du groupe fondamental par Poincaré est fortement influencée par ses recherches sur les fonctions automorphes et les équations différentielles notamment. Pour le définir, il considère des fonctions multivalentes dont les valeurs permutent entre elles lorsque certains lacets sont parcourus sur l'espace. Le phénomène à la base de ces considérations est facilement observable avec les fonctions holomorphes par exemple.

Nous nous proposons d'illustrer ceci par l'analyse d'un exemple simple et qui sera à coup sûr parlant pour le lecteur. Ce faisant, notre but est de montrer clairement comment les groupes ont pu s'imposer naturellement dans le travail de Poincaré, sans pour autant entrer dans la complexité et la diversité de ses recherches. Reprenons l'excellent exemple proposé par Guy

---

[12]Que le lecteur garde bien à l'esprit qu'en ce qui concerne Poincaré, nous présentons les choses de manière simplifiée. Pour une idée des difficultés et discussions soulevées par les nombres de Betti, on pourra consulter le Chapitre II, §3 de [184].

[13]Cf. le *Second complément à l'Analysis situs* [182].

[14]Cette conjecture, datant de 1904, affirme que toute variété tridimensionnelle compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère de dimension 3. La résolution de cette conjecture par Grigori Perelman a été officialisée en 2006.

[15]Poincaré en donne d'ailleurs la méthode dans le *Second Complément* [182], là où sont introduits pour la première fois les nombres de torsion. Ce que nous appelons "matrices d'incidence" sont les "tableaux" utilisés par Poincaré.

[16]Un procédé a été donné par Tietze dans [221]. Ce qu'on obtient est une une présentation par générateurs et relations. Ceci est source de nombreuses questions et a stimulé la théorie combinatoire des groupes, comme on pourra s'en rendre compte à la lecture de [39] notamment.

Hirsch[17] et détaillons-le : il est bien connu que pour tout nombre complexe non nul z, deux valeurs, opposées l'une de l'autre, sont admissibles pour $\sqrt{z}$. On peut tout à fait définir la fonction 'racine' localement sur $\mathbb{C}^\times$, de manière continue, et même holomorphe. Mais on ne peut la définir sur $\mathbb{C}^\times$ entier comme l'illustre l'expérience suivante. Imaginons que l'on veuille suivre les valeurs de la fonction racine le long du cercle unité $\mathcal{C}$ parcouru dans le sens trigonométrique, en partant de 1. Choisissons la valeur 1 pour $\sqrt{1}$ (le phénomène mis en évidence est le même si l'on choisit -1). Si l'on exige que les valeurs choisies pour chaque élément de $\mathcal{C}$ forment une fonction 'racine' qui soit continue, alors on est contraint de faire décrire aux $\sqrt{z}$ le même cercle $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique, mais avec une vitesse de rotation deux fois moindre ; ainsi, lorsque z a décrit $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique, $\sqrt{z}$ a parcouru uniquement le demi-cercle. Et une fois z de retour en 1 après une rotation, $\sqrt{z}$ se voit affecter la valeur -1. Le parcours de z le long du chemin fermé $\mathcal{C}$ a donc échangé les valeurs 1 et -1 pour $\sqrt{1}$ (ce qui, au passage montre que la fonction 'racine' ne peut être définie de façon continue sur $\mathbb{C}^\times$). Si l'on suit une nouvelle fois $\mathcal{C}$ et que l'on revient à nouveau en 1, $\sqrt{z}$ parcourt cette fois le demi-cercle unité inférieur et reprend à nouveau la valeur 1 lorsque z revient en 1. Ainsi suivre $\sqrt{z}$ le long de $\mathcal{C}$ induit une permutation d'ordre 2 de ses valeurs.

Si maintenant l'on considère deux lacets de même "base"[18] et les valeurs d'une fonction multivalente (telle que 'racine') le long de ces deux lacets parcourus l'un après l'autre, apparaît naturellement la permutation composée des permutations associées à chacun des deux lacets.

Voici donc l'idée à la base de la définition par Poincaré du groupe fondamental. L'ensemble des permutations ainsi associées à certaines fonctions multivalentes le long de lacets bien choisis tracés sur une variété forme un groupe, la loi interne composant les permutations associées à deux lacets successifs. Précisons ce qu'il faut entendre par "lacets bien choisis" : il s'agit de prendre l'ensemble des lacets tracés sur la variété mais en considérant comme équivalents deux lacets entre lesquels on peut passer par déformation continue[19]. En effet si l'on suit les valeurs d'une fonction multivalente le long de

[17] Cf. [112] p. 12-13.

[18] Est appelé "base" le point jouant à la fois le rôle d'origine et d'extrémité.

[19] Il y a de nombreuses remarques à faire au sujet de cette définition. Elle est calquée sur celle que l'on trouve dans le *Cinquième complément à l'Analysis situs* de Poincaré ([183] p. 449), qui était en fait une correction de la définition originelle – que l'on trouve, elle, dans *Analysis situs* ([180] p.241). Dans *Analysis situs*, Poincaré avait introduit la notation $M_0BM_0 \equiv 0$ pour un contour fermé tracé sur une variété, "si ce contour fermé se réduit à un lacet" (p. 241), sachant qu'un "point M décrit sur la variété V un *lacet* s'il va d'abord de M_0 en M_1 par un chemin quelconque M_0BM_1, s'il décrit ensuite un contour infiniment petit et si, enfin, il revient de M_1 à M_0 par le même chemin M_1BM_0" (à noter

deux lacets $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même base P, mais équivalents au sens ci-dessus, on pourra voir qu'en revenant en P la valeur de la fonction aura subi la même permutation que l'on ait parcouru $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$.

Brouwer a su rendre plus rigoureuse l'idée de déformation continue et l'a d'ailleurs extraite du cadre des lacets aux applications continues[20]. Cette déformation continue porte maintenant le nom de "déformation homotopique", ou tout simplement "homotopie". Présenté avec le formalisme actuel, déformer continûment une application continue $f : X \to Y$ en une application continue $g : X \to Y$ c'est se donner une application. $F : X \times [0,1] \to Y$, continue en les deux variables, vérifiant $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = g(x)$ pour tout x dans X.

Avec le concept d'homotopie disponible, le groupe fondamental d'un espace E peut être défini comme l'ensemble des lacets de base un certain point x_0 de E, considérés à homotopie près[21]. La composition de deux classes de lacets est définie comme la classe du lacet obtenue en parcourant à la suite deux lacets représentant ces classes. L'élément neutre est, lui, la classe du lacet constant de base x_0 ; cette classe est formée de l'ensemble des lacets tracés sur E, de base x_0, que l'on peut déformer de manière continue jusqu'à les comprimer en x_0.

---

que nous n'empoyons jamais le mot *lacet* avec le sens que lui confère Poincaré, à part quand nous le citons). Mais il avait ensuite affirmé qu'en conséquence de sa définition, on a $M_0BM_0 \equiv 0$ "si le contour fermé M_0BM_0 constitue la frontière complète d'une variété à deux dimensions faisant partie de V". Ceci est erroné et montre une certaine confusion entre le concept d'homologie et le concept d'homotopie ; il faut en effet que la variété dont le contour fermé constitue la frontière soit connexe et telle que tout contour tracé sur elle se déforme continûment en un point sans en sortir (on dirait maintenant d'une telle variété qu'elle est *simplement connexe*, mais la simple connexité n'avait pas cette signification-là pour Poincaré...). En fait, tout le travail de Poincaré sur l'Analysis situs est essentiellement celui d'un pionnier, où la part belle est faite à l'intuition, et qui comporte donc quelques erreurs ou un certain manque de rigueur dans les définitions. La "déformation continue" que Poincaré invoque dans sa version corrigée de l'équivalence entre lacets n'est pas définie ; elle se contente de faire écho à l'intuition géométrique que l'on peut en avoir.

[20]Cf. [30] p. 527 : "Under a continuous modification of a univalent continuous transformation we understand in the following always the construction of a continuous series of univalent continuous transformations, i. e. a series of transformations depending in such a manner on a parameter, that the position of an arbitrary point is a continuous function of its initial position and the parameter".

[21]E est supposé connexe. Dans le cas d'un espace non connexe, on considère le groupe fondamental associé à chaque composante connexe. E étant connexe, le choix d'un point x_0, base de tous les lacets, est égal.

6.1.2 Les groupes d'homotopie supérieurs

Ce que nous avons dit précédemment, même si nous sommes restés superficiels, devrait suffire pour que le lecteur appréhende sans gêne la suite de nos propos. Encore une fois, nous avons simplement tenu à donner les idées présentes chez Poincaré et à mentionner la contribution de Brouwer.

Précisons maintenant certains des termes employés. Par 'chemin' d'un espace E il faut entendre l'image par une application continue f à valeurs dans E du segment $[0, 1]$. Le point $f(0)$ est appelé 'origine' du chemin et $f(1)$ son 'extrémité'. Un 'lacet' est un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident ; on peut, de manière équivalente, définir un lacet comme l'image continue d'un cercle.

Une généralisation du groupe fondamental tel que défini initialement par Poincaré à l'aide des fonctions multivalentes n'est pas évidente. Mais avec la reformulation en termes de lacets et d'homotopie il en est une qui semble s'imposer naturellement. Nous nous garderons néanmoins de trop stigmatiser la curiosité du fait qu'il ait fallu attendre 1935 pour voir cette généralisation s'imposer, avec le mathématicien polonais Witold Hurewicz, sous le nom de 'groupe d'homotopie en dimension supérieure' ou, en abrégé, 'groupe d'homotopie supérieur'. Dans [126], Hopf exprime le sentiment partagé par la plupart des mathématiciens de l'époque devant cette contribution de Hurewicz : "Das hätte ich nicht entdecken können – das wäre mir zu einfach gewesen"[22]. Ce n'est pas tant la surprise des mathématiciens devant la simplicité de la découverte qu'il faut y lire que la surprise des mathématiciens devant le fait que cette découverte, malgré sa simplicité, est intéressante. Ce qui suit devrait éclairer nos propos.

Le mathématicien tchèque Eduard Čech a en fait introduit les groupes d'homotopie en dimension supérieure ("Höherdimensionale Homotopiegruppen") avant Hurewicz, en 1932 ; il les a présentés lors du Congrès International des Mathématiciens de Zürich. On ne trouve dans la littérature mathématique que six lignes en lien avec cet exposé, dans le recueil publié à l'occasion du Congrès[23]. Voici à peu de choses près ce qu'elles contiennent ; étant donné un espace R et un point fixé a quelconque de R, on peut, pour tout entier naturel p, définir l'ensemble G_p des parties de R contenant a qui sont des images continues de la sphère de dimension p, modulo la relation d'homotopie. Čech précise que G_p peut être muni d'une multiplication qui en fait un groupe commutatif et remarque que G_1 est le groupe fondamental[24].

[22]"Je n'aurais pu découvrir cela – c'était trop simple pour moi".

[23]Cf. [38].

[24]La terminologie allemande est fort trompeuse car le mot "Weg" a pour sens ordinaire "chemin" mais est également employé pour désigner un "lacet", le contexte permettant

Rien de plus ne figure dans les actes du Congrès. Il n'est même pas fait mention de la méthode selon laquelle la multiplication est définie dans G_p. Quelques renseignements nous sont néanmoins fournis par Mac Lane dans son autobiographie[25]. Il y affirme que Čech a défini les éléments du deuxième groupe d'homotopie d'un espace X comme les applications continues du carré $[0,1] \times [0,1]$ dans X, telles que le bord du carré est envoyé sur un point fixé x_0.[26] Il ajoute que le produit fg de deux éléments f et g s'obtient, pour Čech, en collant deux carrés le long d'un de leurs côtés et en considérant l'image du premier par f et l'image du second par g. Avec cette définition, on peut se représenter assez simplement les objets impliqués à l'aide de dessin, et se convaincre également sans peine de la commutativité du produit[27]. Apparemment, c'est lors de la discussion accompagnant l'exposé de Čech que fut mise en évidence la commutativité du deuxième groupe d'homotopie, qui contraste singulèrement avec le fait que le groupe d'homotopie en dimension 1, i.e. le groupe fondamental, peut être absolument quelconque. Selon Mac Lane, Čech eut le sentiment de se fourvoyer et retira sa définition de groupe d'homotopie en dimension quelconque. I. M. James nous présente dans [133] une version des choses qui a des traits communs avec celle de Mac Lane, sans néanmoins être identique[28]. Selon lui, Čech a été découragé de poursuivre ses recherches dans cette voie par la réaction de l'auditoire. Deux reproches principaux ont été exprimés ; d'une part le fait que les G_p, mis à part pour $p = 1$, sont abéliens, et d'autre part les difficultés rencontrées pour les calculer[29].

de trancher entre les deux interprétations. Il arrive parfois que la terminologie plus précise "geschlossen Weg" soit employée pour "lacet". Ce que nous avons traduit par groupe fondamental est en fait désigné par Čech par "Wegegruppe Poincarés".

[25]Cf. [155], p. 127-128.

[26]C'est, bien entendu, à homotopie près.

[27]Pour plus de clarté, on pourra consulter les explications données dans [101], p. 340, car la présentation est similaire à celle décrite ici.

[28]Comme dans tout témoignage, il est difficile de faire concorder tous les éléments. Malheureusement, ni James ni Mac Lane ne citent leurs sources. On pourrait donner la primauté aux dires de Mac Lane car il a bien connu la plupart des mathématiciens présents au Congrès de Zürich. Néanmoins nous devons tenir compte de ce que son autobiographie a été rédigée environ 70 ans après les faits en question. De plus, à notre connaissance, il n'était pas présent à cette conférence et d'ailleurs, en 1932, la topologie n'avait pas pour lui l'attrait qu'elle acquit par la suite – il était principalement occupé alors par sa thèse de logique. Même les termes qu'il emploie pour décrire l'exposé de Čech sont à notre avis quelque peu anachroniques ; il met notamment l'accent sur les applications alors que le résumé de Čech invite plutôt à considérer les ensembles images. Dans la présentation que fait Mac Lane des concepts introduits par Čech s'opère certainement une réécriture en des termes modernes.

[29]Cf. [133] p. 839 : "those who were present seem to agree that its reception was such as to discourage him from pursuing the study of these invariants any further. Apparently it was thought that the commutative nature of the higher homotopy groups meant that

Le premier de ces reproches semble de nature essentiellement philosophique. Il se peut qu'il traduise un héritage quelque peu obsolète de la manière qu'avaient Poincaré et la plupart de ses contemporains de voir les groupes ; pour Poincaré, un groupe ne peut par essence pas être commutatif car, dans la terminologie "groupe", est implicite l'idée de "groupe de permutations"[30]. Le fait que les groupes d'homologie, qui sont abéliens, furent longtemps réduits aux invariants numériques qui les caractérisent – les nombres de Betti et de torsion – s'apparente au même ordre d'idée. Plus concrètement, il semble que l'auditoire, au premier rang duquel Alexandroff, ait soutenu que la commutativité des groupes introduits par Čech faisait qu'ils n'apportaient probablement aucune information qui n'ait été du ressort de l'homologie[31].

Quant à la seconde objection elle est d'ordre bien plus pragmatique que la première et, rétrospectivement, plus justifiée. Bien que Tietze ait fourni un algorithme permettant le calcul (c'est-à-dire fournissant un système de générateurs et de relations) du groupe fondamental d'une variété, il est en pratique peu commode. De plus, un aspect très fâcheux est qu'il est en général impossible de se prononcer sur l'isomorphie entre deux groupes donnés par générateurs et relations. Si de tels inconvénients existent déjà pour les images continues du cercle à homotopie près, cela ne laisse rien augurer de bon concernant les images continues de sphères de dimension arbitrairement grande.

Avec les groupes d'homotopie supérieurs de Čech, nous ne sommes pas en présence d'un travail resté un temps méconnu à cause du manque de célébrité de son auteur ou du fait de l'incompréhension qu'il a pu susciter au premier abord[32]. Il s'agit ici d'un mathématicien reconnu de son vivant et passé à la postérité, et d'une découverte qui, plutôt que de susciter l'incompréhension, semble au contraire – fait singulier – avoir semblé trop évidente à plusieurs mathématiciens. La résistance rencontrée par Čech mérite donc d'être analysée. Nous le ferons à la lumière des développements ultérieurs de Hurewicz.

Lorsque Hurewicz en 1935, dans [129], définit à nouveau les groupes d'ho-

---

they could not be any use, and in any case no-one knew how go about computing them".

[30]Nous avons d'ailleurs mis en évidence via l'exemple de la fonction 'racine' comment les permutations apparaissaient naturellement dans le cadre des recherches de Poincaré. Et le lecteur aura probablement remarqué que Poincaré n'a par contre pas introduit les groupes de Betti ou d'homologie, mais simplement les invariants numériques les caractérisant, à savoir les nombres de Betti et de torsion.

[31]Cf. [132] p. 566.

[32]Une liste répertoriant de manière exhaustive tous les travaux qui ont connu un tel destin semble impossible à dresser... Citons à titre d'exemple les mémoires de Galois sur la résolubilité algébrique des équations, l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann ou même, quitte à sortir du cadre des mathématiques, les lois de Mendel.

motopie supérieurs, c'est apparemment indépendamment de Čech, ce qui se conçoit aisément vu le peu de publicité faite aux groupes d'homotopie supérieurs lors du Congrès de Zürich et l'abandon par Čech lui-même des recherches sur ce concept. En outre sa définition est différente et son équivalence avec celle de Čech peut ne pas voir été reconnue immédiatement par les quelques topologues qui la connaissaient. Dans la deuxième partie de [129] (p. 521), Hurewicz explique d'ailleurs n'avoir été informé qu'après la soumission de son premier papier de l'existence d'une définition antérieure par Čech, et mentionne le fait que ce dernier lui aurait fait savoir en privé que l'idée remonterait même à Dehn. Plus précisément, on apprend par Hassler Whitney, dans [245] (p. 110), que Hurewicz a exposé sa définition et ses premiers résultats sur les groupes d'homotopie supérieurs lors de la conférence internationale de Moscou en 1935. Alexander aurait, selon Whitney, réagi en affirmant avoir considéré cette définition bien longtemps auparavant (peut-être vingt ans plus tôt !), et l'avoir alors rejetée à cause de son apparente simplicité. Van Dantzig et – ce qui ne surprendra pas le lecteur – Čech auraient également affirmé avoir déjà considéré, et même utilisé, la notion présentée par Hurewicz[33]. Ceci indique encore une fois que le concept de groupe d'homotopie supérieur n'était probablement pas extrêmement difficile à imaginer, qu'il était en quelque sorte dans l'air du temps, mais qu'il a fallu attendre que sa portée commence à être saisie pour qu'il soit mis en évidence.

La définition de Hurewicz, bien qu'équivalente à celle de Čech, est néanmoins assez différente, ce qui explique probablement en partie son succès. Dans la première partie de [129], Hurewicz considère, pour un entier naturel n non nul quelconque, l'ensemble $Y^{S_{n-1}}$ des applications continues de la sphère $(n-1)$-dimensionnelle S_{n-1} dans un espace topologique Y[34]. Cet ensemble est un espace topologique localement contractile, et il est par conséquent pertinent de considérer les classes d'homotopie de lacets tracés sur cet espace, car elles traduisent alors des propriétés globales de l'espace. Etant donné des point fixés x_0 de S_{n-1} et y_0 de Y, on peut considérer le sous-espace N de $Y^{S_{n-1}}$ formé des applications continues F soumises à la condition $F(x_0) = y_0$.

[33] La conférence de Moscou eut lieu en septembre 1935, soit après les dates de soumission des deux premières parties de [129] (respectivement le 22 décembre 1934 et le 27 avril 1935). Comment se fait-il que Hurewicz précise dans la deuxième partie de [129] que Čech avait considéré les mêmes objets un peu avant lui ? Nous n'avons su décider si c'est parce que Hurewicz a pu reprendre ce manuscrit juste après la conférence de Moscou, ou si c'est parce qu'il en a été informé dès avant cette conférence.

[34] Afin de définir sans problème les groupes d'homotopie et afin d'obtenir des propriétés suffisamment intéressantes, Hurewicz suppose Y métrisable, séparable, connexe et localement contractile.

L'espace N n'est pas forcément connexe mais, selon Hurewicz, on peut montrer que les groupes fondamentaux associés à chaque composante connexe de N sont isomorphes. On peut donc définir le groupe fondamental de N comme le groupe fondamental d'une quelconque de ses composantes connexes. Les connexités de S_{n-1} et Y impliquent d'ailleurs que ce groupe est indépendant du choix de x_0 et y_0. On obtient ainsi la définition d'un groupe ne dépendant que de n et de Y, que Hurewicz nomme n-ième groupe d'homotopie de Y et note $\pi_n(Y)$.[35] Le groupe $\pi_1(Y)$ coïncide avec le groupe fondamental de Y. Conservant en mémoire le fait que ce groupe peut être défini indépendamment du choix de x_0, y_0 et de la composante connexe de N, on peut synthétiser cette définition en écrivant $\pi_n(Y) := \pi_1(Y^{S_{n-1}})$.

La définition que Hurevicz a présentée à Moscou n'est pas exactement la même[36]. Il y définit le n-ième groupe d'homotopie de Y comme le groupe fondamental de l'espace des applications continues de la boule de dimension $n-1$ dans Y, envoyant le bord de la boule sur un même point de Y. Cette définition est équivalente à la précédente car une boule de dimension $n-1$ dont le bord est identifié à un point est homéomorphe à la sphère de même dimension.

Le résumé évoqué ci-dessus ne nous apprend rien sur la définition de la composition dans les groupes d'homotopie ni sur la raison de leur commutativité en dimension supérieure à 2. L'article paru aux Proceedings Koninklijke Academie Wetenschappen Amsterdam, bien que plus fourni, n'en dit rien non plus[37]. Néanmoins, avec les définitions proposées par Hurewicz, la loi de composition est évidente vu qu'il s'agit de la même loi que celle ayant cours dans le groupe fondamental, c'est-à-dire la composition des lacets. Si f et g sont les représentants de classes de $\pi_1(Y^{S_{n-1}})$, i.e. des applications continues de S_1 dans $Y^{S_{n-1}}$, on définit leur composée $f.g$ via $(f.g)(s) = f(2s)$, pour s dans $[0, \frac{1}{2}]$ et $(f.g)(s) = g(2s-1)$ pour s dans $[\frac{1}{2}, 1]$, s paramétrant le cercle S_1 le long de $[0,1]$. Le produit des classes contenant f et g est alors bien entendu pris égal à la classe contenant $f.g$. Pour ce qui est de la commutativité, nous n'avons aucune information sur la manière dont Hurewicz l'obtient mais selon Dieudonné[38], il devait être clair pour Hurewicz que que les $Y^{S_{n-1}}$ sont, pour $n \geq 2$, des H-espaces[39] et il est facile de voir que le groupe fondamental d'un H-espace est commutatif...

[35] Cf. [129], I, p. 114 : "Diese Gruppe wollen wir die n-te *Homotopiegruppe von* Y *nennen und mit* $\pi_n(Y)$ *bezeichnen.*

[36] Cf. le résumé de cet exposé disponible dans les actes de la Conférence [130].

[37] Il faut dire que la plupart des démonstrations en sont absentes.

[38] Cf. [55] p. 274.

[39] Ce qui signifie essentiellement qu'ils sont munis d'une structure multiplicative.

Les deux définitions adoptées par Hurewicz traduisent une intuition géométrique moins évidente que celle de Čech. Il faut cependant avoir à l'esprit le fait que la sphère S_n est homéomorphe au produit smash[40] $S_1 \wedge S_{n-1}$ et, de ce fait, qu'une homotopie entre deux applications continues de S_1 dans $Y^{S_{n-1}}$ est la même chose qu'une homotopie entre deux applications continues de S_n dans Y.[41] Les groupes d'homotopie de Hurewicz contiennent donc quelque peu implicitement l'idée de regarder les images continues de la sphère n-dimensionnelle à homotopie près.

Si l'intuition géométrique sous-jacente à l'homotopie est un peu dissimulée chez Hurewicz, c'est probablement qu'il a privilégié une définition possédant une autre qualité. Avec l'homéomorphie entre S_n et $S_1 \wedge S_{n-1}$ se fait jour l'idée de regarder des espaces de lacets obtenus par itération : plutôt que de considérer l'espace des applications continues de S_2 dans Y on peut regarder l'espace des applications continues de S_1 dans Y^{S_1}, puis on peut remplacer Y^{S_3} par l'espace des applications continues de S_1 dans Y^{S_2}, etc. Précisons qu'une telle présentation est absente de l'article [129] de Hurewicz et qu'il s'agit de l'interprétation – a priori un peu poussée, mais peut-être disposait-il d'informations lui confirmant que c'était bien la vision des choses de Hurewicz – donnée par Dieudonné dans [55].

Être à même de déterminer par un processus itératif les espaces Y^{S_n} n'offre pas la perspective de calculs plus aisés que ceux permis par la définition de Čech. Mais la définition de Hurewicz semble, sous l'effet de l'interprétation de Dieudonné, offrir une machinerie conceptuelle plus efficace car le phénomène itératif que nous avons décrit plus haut permet des raisonnements par récurrence, et car, comme nous l'avons déjà vu, $Y^{S_{n-1}}$ est un H-espace dès que $n \geq 2$. En bref, la définition de Hurewicz n'est donc pas réellement moins sujette à l'objection faite à Čech sur la difficulté du calcul des groupes d'homotopie supérieurs mais offre peut-être des perspectives théoriques plus étendues. Ce n'est en tout cas probablement pas le point décisif dans le succès rencontré par Hurewicz relativement à l'insuccès de Čech.

Ce que possède le travail de Hurewicz qui le distingue véritablement de celui de Čech, c'est qu'il a su montrer la pertinence des groupes d'homotopie

[40]Etant donné deux espaces topologiques X et Y, dans lesquels ont été fixés x_0 et y_0, le 'smash product' $X \wedge Y$ consiste en le produit direct $X \times Y$ quotienté par $(X \times \{y_0\}) \times (\{x_0\} \times Y)$.

[41]Les notations allégées que nous utilisons pour communiquer les idées essentielles, sans toutefois alourdir le texte des précisions nécessaires à un langage mathématique correct, ne doivent pas faire oublier que les espaces considérés sont tous pointés. Ainsi, lorsque nous parlons d'une homotopie entre deux applications continues de S_n dans Y, il ne faut pas oublier qu'ont été fixés au départ un point x_0 dans S_n et un point y_0 dans Y, et que les applications continues que nous considérons envoient toutes x_0 sur y_0. La même chose est bien entendu valable avec les applications continues de S_1 dans $Y^{S_{n-1}}$.

supérieurs – Čech a peut-être été découragé dans ses recherches par la réaction de l'auditoire de Zürich avant d'avoir pu se former une opinion réelle sur l'utilité de l'homotopie supérieure. Il serait hors de propos de lister ici l'intégralité des résultats obtenus par Hurewicz dans [129] mais nous en donnons une partie car ils expliquent la pérennité qu'a tout de suite acquise l'étude des groupes d'homotopie supérieurs et car, dans la perspective de l'article [121] de Hopf, il est important de voir se dessiner le lien avec les groupes d'homologie.

Tout d'abord, illustrant le fait que certains groupes d'homotopie supérieurs peuvent être calculés, on peut mentionner les résultats obtenus par Hurewicz au sujet de l'homotopie des sphères. Ainsi a-t-il établi :
- $\pi_n(S_m) = 0$ pour $n < m$;
- $\pi_n(S_1) = 0$ pour $n \geq 2$;
- $\pi_n(S_n) \cong \mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$;
- $\pi_n(S_3) \cong \pi_n(S_2)$ pour $n \geq 3$, avec en particulier $\pi_3(S_3) \cong \pi_3(S_2) \cong \mathbb{Z}$.

Il est à noter que les derniers isomorphismes résultent de théorèmes plus généraux reliant l'homotopie de G, H et $\dfrac{G}{H}$, où H est un sous-groupe fermé du groupe topologique G. Ces théorèmes laissent donc augurer la possibilité de calculer les groupes d'homotopie d'objets autres que les sphères.

Mais l'isomorphisme $\pi_3(S_2) \cong \mathbb{Z}$ illustre également la pertinence des groupes d'homotopie. Il s'agit en effet d'une information qui n'est pas fournie par l'homologie, étant donné que le troisième groupe d'homologie de S_2 est trivial. En outre ce résultat est une reformulation plus précise, dans le seul cadre de la théorie des groupes, d'une proposition[42] antérieure de Hopf selon laquelle il existe une infinité de classes, modulo déformation continue, d'applications continues de S_3 dans S_2. Hopf avait eu besoin, pour prouver cette proposition, d'une étude assez poussée – avec notamment la construction d'une application continue non homotope à l'application constante – accompagnée de la création d'un invariant[43]. Via les groupes d'homotopie, Hurewicz retrouve le résultat de Hopf avec moins d'effort et de manière abstraite ; sa méthode n'est pas constructive mais il obtient cependant comme information supplémentaire le fait que la classe de l'application construite par Hopf engendre $\pi_3(S_2)$.

Les isomorphismes présentés par Hurewicz sur les groupes d'homotopie des sphères montrent donc qu'il est possible de calculer des groupes d'homotopie supérieurs, que ces groupes sont porteurs d'une information parfois non fournie par l'homologie, et qu'ils peuvent permettre de retrouver de manière

[42] Cf. "Satz I" de [119].

[43] On peut avoir dans [194] un aperçu de la motivation historique ayant mené Hopf à cette étude ; le problème trouve sa source chez Clifford et Klein.

abstraite un résultat existant, ce qui laisse imaginer que la même chose est possible pour d'autres résultats, voire que de nouveaux peuvent être établis.

La deuxième partie du papier de Hurewicz traite d'un point d'importance dans l'optique de notre étude. Il s'agit du lien entre homotopie et homologie. Bien sûr, et c'est ce qui fait l'intérêt des groupes d'homotopie, l'homotopie n'est pas réductible à l'homologie. Mais il existe néanmoins un lien fort entre ces deux concepts qui ouvre la voie à l'utilisation des connaissances sur l'un pour l'étude de l'autre. A titre d'exemple, nous reproduisons les deux propositions retenues par Solomon Lefschetz dans son hommage à Hurewicz[44].

La première s'énonce comme suit :

I. *Si les $n-1$ ($n \geq 2$) premiers groupes d'homotopie d'un espace connexe et localement contractile sont triviaux, alors son n-ième groupe d'homotopie est isomorphe à son n-ième groupe d'homologie.*

Dit autrement, pour un espace asphérique en dimension 1 à $n-1$, les groupes d'homotopie et d'homologie en dimension n sont isomorphes.

La seconde proposition s'intéresse aux espaces contractiles (i.e. déformables continûment, en eux-mêmes, en un point). Hurewicz a établi dans la première partie de son article qu'un espace compact (connexe et localement contractile) de dimension n est contractile si et seulement si ses n premiers groupes d'homotopie sont triviaux. Comme corollaire de la proposition notée I, Hurewicz obtient :

II[45]. *Un polyèdre connexe est contractile si et seulement si son groupe fondamental et ses groupes d'homologie en toute dimension sont triviaux.*

Dit autrement, un polyèdre connexe est contractile si et seulement s'il est simplement connexe et acyclique en toute dimension[46].

Nous n'en dirons pas plus sur l'article de Hurewicz car nous avons le matériel nécessaire pour aborder le travail de Hopf. Il est cependant à noter que les parties III et IV de [129] contiennent également des considérations de premier plan, comme l'introduction de la notion de 'type d'homotopie' ou l'utilisation des revêtements universels en lien avec l'homotopie supérieure.

---

[44] Cf. [146], p. 79.

[45] Cette numérotation n'est pas l'originale.

[46] Quelques précisions terminologiques : un espace connexe dont le groupe fondamental est trivial est dit "simplement connexe". Un espace dont le n-ième groupe d'homotopie est trivial est dit "asphérique" en dimension n tandis qu'un espace dont le n-ième groupe d'homologie est trivial est dit "acyclique" en dimension n.

6.2 L'article de Hopf

L'intitulé de l'article [121] de Hopf mêle groupe fondamental et deuxième groupe d'homologie[47]. Aucune relation entre ces deux objets n'était alors connue. Pour introduire son résultat, Hopf se contente de rappeler le lien bien connu entre le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie (le second est l'abélianisé du premier), ce qui semble lui suffire à justifier que l'on cherche à établir un lien entre le groupe fondamental et le deuxième groupe d'homologie. Une justification supplémentaire se trouve dans [120] ; il y souligne le fait que le groupe fondamental d'un polyèdre connexe et ses groupes d'homologie en dimension strictement supérieure à 2 sont indépendants, au sens où deux polyèdres peuvent avoir même groupe fondamental sans que leurs groupes d'homologie en dimension supérieure ne soient identiques[48] (même à isomorphisme près, évidemment). Avec cette information supplémentaire, le problème acquiert une légitimité supérieure. Il existe un lien simple entre le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie et une indépendance entre le groupe fondamental et les groupes d'homologie à partir de la dimension 3. Il faut pouvoir se prononcer sur cette lacune que constitue la dimension 2. La raison qui a poussé Hopf à étudier la question semble essentiellement résumée par la phrase précédente. Mais, comme nous allons le voir, le résultat et ses conséquences dépassent de beaucoup le fait de combler une lacune de la connaissance mathématique.

Dans la présentation que fait Hopf de son résultat est mis l'accent sur son caractère algébrique ; le caractère topologique ne vient qu'en second. En substance le deuxième groupe d'homologie n'est pas caractérisé par le groupe fondamental, ce qui signifie que des polyèdres connexes ayant des deuxièmes groupes d'homologie distincts peuvent néanmoins avoir le même groupe fondamental. Cela dit,

"Jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ ist durch einen bestimmten algebraischen Prozeß eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ zugeordnet, die im allgemeinen nicht die Nullgruppe ist ; wenn $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe eines Komplexes K und wenn $\mathfrak{S}^2$ die Untergruppe von $\mathfrak{B}^2$ ist, die aus denjenigen Homologieklassen besteht, welche

[47]Hopf désigne tout au long de l'article par "Bettische Gruppe" ce que nous appelons "groupe d'homologie". Plus précisément, Hopf considère l'homologie à coefficients entiers et il semble (cf. première note de bas de page de [120]) préférer utiliser l'expression "groupe de Betti" pour "groupe d'homologie à coefficients entiers".

[48]En fait, Hopf sait même qu'étant donné un groupe $\mathfrak{G}$ et un groupe abélien $\mathfrak{B}$ quelconques, si l'on fixe n, il existe un polyèdre connexe de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ et de groupe d'homologie en dimension n isomorphe à $\mathfrak{B}$.

stetige Bilder von Kugelflächen enthalten, so ist

$$\frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2} \simeq \mathfrak{G}_1^*."^{49}$$

Le point mis en avant par Heinz Hopf est, si l'on traduit, qu'"à tout groupe peut être affecté un groupe abélien par un procédé algébrique déterminé". Il présente donc avant tout un résultat algébrique, obtenu par un procédé algébrique. Ce n'est que dans un deuxième temps qu'est précisé le fait que ce résultat peut être interprété topologiquement. Que le caractère algébrique est privilégié au caractère topologique deviendra encore bien plus manifeste lorsque nous nous pencherons sur le cœur de l'article.

L'introduction énumère ensuite toutes les conséquences intéressantes du rapport établi entre le groupe fondamental et le deuxième groupe d'homologie. La disproportion est frappante entre la justification de la légitimité de la question et l'illustration de l'utilité d'y avoir répondu ; quatre lignes contre une page et demi ! Tout d'abord est mis en avant le fait qu'on obtient une borne inférieure (qui s'avère être optimale) pour le deuxième groupe d'homologie d'un polyèdre : il ne peut être plus petit que $\mathfrak{G}_1^*$. Viennent ensuite quelques résultats sur les propriétés d'intersection de cycles, dont nous ne parlerons pas ici.

Mais, surtout, Hopf utilise la seconde moitié de son introduction pour discuter du lien entre les méthodes et résultats de son papier et les théories connexes. En lien avec la théorie des groupes, il note l'utilité de la notion de groupe dérivé supérieur ("höheren Kommutatorgruppen") et le fait remarquable que sa construction de $\mathfrak{G}_1^*$ est indépendante de la présentation comme quotient d'un groupe libre[50] que l'on se donne pour $\mathfrak{G}$. Il revient pour finir aux applications topologiques de ses résultats. Il souligne essentiellement le

[49]"A tout groupe $\mathfrak{G}$ est affecté, par un procédé algébrique déterminé, un groupe abélien $\mathfrak{G}_1^*$, qui est en général non nul ; si $\mathfrak{G}$ est le groupe fondamental d'un complexe K et si $\mathfrak{S}^2$ est le sous-groupe de $\mathfrak{B}^2$ consistant en les classes d'homologie contenant les images continues de sphères, alors

$$\frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2} \simeq \mathfrak{G}_1^*."$$

[50]Lorsque l'on considère un groupe G, et que l'on connaît des éléments g_i, $i \in I$ engendrant G, on peut considérer le groupe libre F engendré par f_i, $i \in I$. Ce groupe est par définition l'ensemble des mots que l'on peut former à l'aide des symboles f_i et leurs inverses f_i^{-1}, avec les règles évidentes de simplification. On y ajoute le mot vide, e, qui joue le rôle d'élément neutre. On a un morphisme surjectif de F dans G consistant à envoyer les générateurs f_i sur les g_i. Mais, à part si G est lui-même libre, il existe des relations entre les g_i (par exemple, si G est abélien, on a notamment $g_i g_j = g_j g_i$, $\forall i, j \in I$, relation que l'on peut encore écrire sous la forme $g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = e$). Ces relations permettent de définir un sous-groupe R de F : si l'on reprend l'exemple précédent où G est abélien,

lien fort entre ses investigations et celles de Hurewicz sur les groupes d'homotopie supérieurs mais, étant donnée la présentation effectuée par Hopf, on peut penser qu'il a identifié ce lien a posteriori, qu'il n'a pas été une source d'inspiration, au moins initialement, dans ses recherches. Nous reviendrons sur ce point plus tard, à la lumière de l'analyse de l'article [121].

Ce lien est assez évident car chez Hopf, comme dans les travaux sur l'homotopie supérieure de Hurewicz, les images continues de sphères ont un rôle prédominant. Hopf crée d'ailleurs pour l'occasion le terme "Kugelbild"[51].

La fin de l'introduction de [121] pose la question du prolongement et de la généralisation des résultats obtenus. Nous y reviendrons plus tard.

6.2.1 Une construction topologique

Dans [121], le mathématicien suisse dédie le premier paragraphe à une construction de théorie des groupes et le deuxième, intitulé "Homotopie-Ränder, Kugelbilder und Fundamentalgruppe", à des considérations topologiques. Nous jugeons que Hopf a vraisemblablement d'abord mené des investigations de nature topologique avant de réaliser l'utilité et la portée de considérations purement algébriques inspirées par ces recherches. En effet, les considérations topologiques de Hopf mènent naturellement à l'étude algébrique alors que l'inverse semble plus difficile à justifier car la construction algébrique de Hopf est assez longue et complexe tout en n'affichant aucun but clair. Qui plus est, la présentation adoptée par Hopf dans le résumé envoyé en mai 1940 – donc plus d'un an avant la soumission de l'article aux *Commentarii Mathematici Helvetici* – au comité éditorial de la Conférence de l'Université du Michigan commence par présenter les résultats topologiques. On notera également avec intérêt le fait que, voulant préciser dans son résumé les idées essentielles de la méthode l'ayant mené à ses résultats, c'est le fait de travailler en dimension 2 et de pouvoir représenter tout 2-cycle comme image continue d'une variété orientable de dimension 2 que Hopf met en avant ; ce sont donc les aspects topologiques qui semblent primer. L'inversion entre considérations algébriques et topologiques présente dans l'article de 1942 provient donc certainement d'une réécriture.

R contiendra tous les $f_i f_j f_i^{-1} f_j^{-1}$. Et le quotient de F par R est isomorphe à G. Cette description est la stricte analogue de la présentation par générateurs et relations. Et elle dépend bien entendu du système de générateurs g_i que l'on a choisi au départ.

[51] Terme que l'on peut traduire par "image de sphère". Le terme lui-même n'apparaît pas chez Hurewicz, que ce soit dans [129] ou [130]. Cependant, la définition des groupes d'homotopie de Čech fait intervenir les images continues de sphère et dans [130], Hurewicz considère les images continues d'une boule de dimension $n-1$, dont le bord est envoyé sur un même point (une boule dont le bord est identifié à un point est homéomorphe à une sphère).

Les explications précédentes nous semblent rendre acceptable le fait de présenter en premier la construction topologique de Hopf, et seulement dans un deuxième temps sa construction algébrique. Si nous ajoutons que la construction topologique de Hopf est moins abstraite et bien plus parlante que sa construction algébrique, et qu'il semble plus pertinent, dans l'intérêt de la compréhension du lecteur, de commencer par elle, nous pensons avoir rendu légitime l'inversion que nous effectuons.

Le fait que Hopf ait d'abord présenté une construction purement algébrique avant de débattre de questions topologiques peut s'expliquer par la volonté de partir de considérations et de résultats abstraits et les plus généraux possibles. Cette attitude est conforme à la démarche voulue en toute circonstance par Emmy Noether, et se retrouve notamment dans l'article [118] de Hopf que nous avons étudié précédemment.

Hopf travaille dans le cadre des complexes simpliciaux. Comme nous l'avons déjà vu auparavant, les complexes sont des ensembles de simplexes, les simplexes étant des objets géométriques. Si K est un complexe, $\overline{K}$ est l'objet géométrique, dit "polyèdre", consistant en l'ensemble des points appartenant à au moins un des simplexes de K. L'intérêt de Hopf portant essentiellement sur les dimensions 1 et 2, son attention se concentre sur les complexes K^1 et K^2, formés des simplexes de K de dimension inférieure à 1, resp. 2, ainsi que les polyèdres associés $\overline{K^1}$ et $\overline{K^2}$.

Si $\mathfrak{F}$ est le groupe fondamental de K^1, il est clair que ses éléments engendrent le groupe fondamental $\mathfrak{G}$ de K. Toutes les relations valables dans $\mathfrak{F}$ le sont également dans $\mathfrak{G}$ mais par contre certaines relations peuvent n'être valables que dans $\mathfrak{G}$. Il se peut en effet qu'un chemin soit homotope à un point dans $\overline{K}$ – un tel chemin est d'ailleurs déjà contractile dans $\overline{K^2}$ – sans l'être dans $\overline{K^1}$; c'est le cas si ce chemin correspond[52] au bord d'un 2-simplexe de K.

Hopf suppose K connexe et nomme O le point pris pour base des lacets. Les éléments de $\mathfrak{F}$ représentés par des lacets de $\overline{K^1}$ homotopes à un point dans $\overline{K}$ – ou, ce qui suffit, dans $\overline{K^2}$ – forment un ensemble $\mathfrak{R}$. On peut vérifier que $\mathfrak{R}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{F}$. Ce sous-groupe contient donc les relations permettant d'obtenir $\mathfrak{G}$ à partir de $\mathfrak{F}$. Bien que précisé plus tard par Hopf, un résultat essentiel pour son étude est que, dans son contexte, $\mathfrak{F}$ est un groupe libre. La donnée de $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{R}$ constitue donc une présentation par générateurs et relations du groupe $\mathfrak{G}$.

[52]Le bord d'un simplexe est lui-même un complexe et ne peut donc pas être un chemin, qui est lui un ensemble de points. On emploiera systématiquement le terme "correspondre" pour relier les simplexes ou complexes de K avec les éléments de $\overline{K}$ qu'ils définissent.

Nous avons dit que si un chemin correspond au bord d'un 2-simplexe de K, il est contractile dans $\overline{K}$. Cette observation, une fois précisée, offre un lien entre des éléments de $\mathfrak{F}$ et les 2-simplexes. Dans [244], Hassler Whitney a discuté de l'article de Hopf et a essayé de faire apparaître les investigations de ce dernier de manière "naturelle"[53]. Nous allons reproduire une partie des idées de Whitney car elles ont un intérêt pédagogique indéniable et donnent la vision d'un mathématicien de valeur sur le sujet. Il est bien sûr difficile d'évaluer à quel point ces idées sont proches de celles de Hopf mais leur simplicité et l'usage de la notion cruciale de bord homotopique élémentaire, analogue de la "boucle" ("Schleife") utilisée par Hopf, nous laissent penser qu'elles n'en sont pas très éloignées.

La question n'est de toute façon pas nécessairement de savoir à quel point les explications de Whitney adhèrent à la démarche de Hopf. On peut prendre le raisonnement de Whitney comme une "reconstruction rationnelle". Il s'agit d'une procédure de réécriture de l'histoire interne visant à y introduire une rationalité qui reçoive un assentiment maximum de la part de la communauté scientifique. Cette procédure se heurte en général à des anomalies[54], provenant entre autres de ce que tout homme de science peut faire des erreurs. C'est alors un travail sur l'histoire externe qui peut se charger d'expliquer ces anomalies ; dans [244], Whitney ne fait pas ce travail, et nous ne le ferons pas non plus car cela nous entraînerait trop loin[55].

Prenons un chemin $\mathfrak{r}$ représentant un élément de $\mathfrak{R}$. Lorsqu'on déforme continûment ce chemin jusqu'à le contracter en O, il balaie une surface dans $\overline{K}$. Pour simplifier la nature géométrique des objets impliqués, on peut voir $\mathfrak{r}$ comme l'image continue d'un cercle C_0, un certain point fixé Q_0 de ce cercle étant envoyé sur O. On peut ensuite opérer une déformation continue de C_0, paramétrée par t dans $[0, 1]$, consistant à contracter C_0 en des cercles C_t de plus en plus petits et tangents à C_0 en Q_0. A la fin du processus, lorsque $t = 1$ et $C_1 = \{Q_0\}$, les cercles C_t ont balayé l'intégralité du disque D bordé par C_0. Ainsi la contraction de $\mathfrak{r}$ en O revient à se donner une application continue du disque D de bord C_0 dans $\overline{K}$ (restreindre le but à $\overline{K^2}$ suffit d'ailleurs).

Cette description de Whitney a pour but d'expliquer l'introduction par Hopf de la notion de "bord homotopique". Etant donnée une 2-cellule E,

[53] Il ne faut voir aucune connotation catégorielle ici. Whitney s'est simplement efforcé de donner une heuristique de la méthode de Hopf et de faire s'enchaîner les unes aux autres les différentes étapes de la recherche de manière élémentaire et non artificielle.

[54] Cf. [141] p. 234.

[55] Pour un exemple célèbre de reconstruction rationnelle, le lecteur pourra consulter *Preuves et Réfutations* de Lakatos ([140]) ; son étude porte sur la formule d'Euler et reconstruit notamment une évolution rationnelle de la définition de polyèdre.

i.e. un disque fermé ou un objet homéomorphe à un disque fermé, orientée, appelons ρ la courbe décrivant le bord de cette cellule, parcouru une fois dans le sens positif. Considérons une application continue f de E dans $\overline{K}$ telle que

$$f(\rho) \subset \overline{K^1},\ f(E) \subset \overline{K^2}.$$

Ces conditions assurent que $f(E)$ couvre certains 2-simplexes de K. Tout 2-simplexe orienté y_i de K est donc couvert un certain nombre de fois par $f(E)$, disons c_i^+ fois avec une orientation positive et c_i^- avec une orientation positive ; la quantité $c_i = c_i^+ - c_i^-$ est le "degré"[56] ("der Grad") de f dans y_i.

On peut donc définir la 2-chaîne[57] $Y = f(E)$ via la relation $Y = \sum c_i y_i$; $f(\rho) = \mathfrak{r}$ décrit un lacet dans $\overline{K^1}$. Tout lacet obtenu par ce procédé est appelé par Hopf "bord homotopique[58] (continu[59]) du complexe algébrique [de la chaîne] Y".

Au vu de ce qui précède, il est clair qu'un élément de $\mathfrak{R}$ admet un bord homotopique pour représentant. Réciproquement tout bord homotopique peut être déformé en un lacet représentant un élément de $\mathfrak{R}$. Ceci est résumé dans la proposition a de l'article de Hopf (p. 267) ;

$\mathfrak{r}$ *est un bord homotopique si et seulement si l'élément* r *de* $\mathfrak{F}$ *représenté par* $\mathfrak{r}$ *appartient à* $\mathfrak{R}$.

Vu le lien établi entre les bords homotopiques et le groupe $\mathfrak{F}$, on peut chercher à traduire certaines propriétés des bords homotopiques à l'aide de propriétés dans $\mathfrak{F}$. L'ensemble des chaînes d'une dimension fixée est munie d'une structure de groupe. Ainsi, si $Y = \sum c_i y_i$ et $Y' = \sum c_i' y_i$, sont définis $Y + Y' = \sum (c_i + c_i') y_i$ et $-Y = \sum(-c_i) y_i$. En particulier l'ensemble des 2-chaînes de K forme un groupe, que Hopf note $\mathfrak{L}^2$. Il est assez facile de voir (ce qui constitue la proposition d de Hopf, p. 268) que, si $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$ sont bords homotopiques de Y_1 et Y_2, alors $\mathfrak{r}_1^{-1}$ est bord homotopique de $-Y_1$ et $\mathfrak{r}_1.\mathfrak{r}_2$ est bord homotopique de $Y_1 + Y_2$.

[56] L'idée simple de degré telle que nous l'avons retranscrite ici demande beaucoup de travail pour être définie proprement. On pourra consulter [10], chap. XII §4 pour la définition du degré proposée par Alexandroff et Hopf dans un des manuels de référence de l'époque. Pour un point de vue moderne, utilisant les groupes d'homologie, on pourra par exemple consulter [101], chap. 2.2.

[57] Hopf, de même que dans [118], parle de complexe algébrique. Mais pour ne pas créer plus de confusion entre les différentes significations de "complexe", nous utiliserons la terminologie aujourd'hui en vigueur de "chaîne".

[58] "Homotopie-Rand".

[59] Juste avant, Hopf définit la notion analogue dans le cadre simplicial. Etant donné que cela revient au même de travailler en "simplicial" ou en "continu", nous nous restreindrons au second point de vue.

Deux questions basiques se posent forcément. Toute 2-chaîne de K admet-elle un bord homotopique ? Que dire des éléments de $\mathfrak{F}$ représentés par deux bords homotopiques d'une même chaîne ? Hopf répond sans délai à ces deux questions car elles sont fondamentales pour une bonne compréhension des objets introduits. Nous allons suivre l'explication de Whitney, qui ne fait que reprendre des résultats de Hopf, les dessins et quelques détails en plus.

Vu les propriétés mentionnées ci-dessus sur les compositions de bords homotopiques, prouver que toute 2-chaîne élémentaire y_i possède un bord homotopique impliquera la même chose pour toute 2-chaîne. Les y_i ne sont rien d'autre que des 2-simplexes (i.e. des triangles pleins) orientés. Si ∂y_i désigne le lacet, issu d'un des sommets V_i du triangle, correspondant au bord de y_i parcouru une fois dans le sens positif, alors on obtient un bord homotopique de y_i en prenant un chemin reliant O à V_i (qui existe vu que K est connexe), puis décrivant ∂y_i, et revenant enfin de V_i à O. Si l'on note γ_i le chemin reliant O à V_i, le bord homotopique décrit est donc $\lambda_i = \gamma_i \partial y_i \gamma_i^{-1}$. Ce lacet est ce que Whitney nomme “elementary homotopy boundary” (cf. [244] p. 13) et décrit une boucle, la “Schleife” introduite par Hopf p. 268. On peut déformer continûment ce lacet en comprimant d'abord ∂y_i en V_i – procédé durant lequel y_i est balayé – puis en comprimant le lacet restant en rapprochant V_i de O. Le chemin λ_i est donc bien un représentant d'un élément de $\mathfrak{R}$, donc un bord homotopique, et plus précisément un bord homotopique de y_i.

Ainsi la première question soulevée plus haut a-t-elle reçu sa réponse, positive. Ceci permet de préciser le lien entre $\mathfrak{L}^2$ et les bords homotopiques, et donc le groupe $\mathfrak{R}$. A tout élément de $\mathfrak{L}^2$ est associé au moins un élément de $\mathfrak{R}$. Répondre à la seconde question soulevée plus haut va permettre de mieux comprendre ce lien, en déterminant comment se traduit dans $\mathfrak{R}$ le fait d'être bord homotopique d'un même élément de $\mathfrak{L}^2$.

Pour appréhender la réponse de Hopf, on peut suivre les investigations de Whitney dans le cas simple d'un bord homotopique élémentaire, comme λ_i. Considérons donc un chemin γ_j distinct de γ_i, reliant O à un sommet du triangle V_j distinct ou non de V_i. Soit β le chemin d'arêtes du triangle reliant V_j à V_i, parcouru dans le sens positif. Soit β' tel que $\beta\beta'$ relie V_j à lui-même en décrivant le bord de y_i dans le sens positif. Le lacet λ_j s'exprime alors comme la composition $\lambda_j = \gamma_j \beta\beta' \gamma_j^{-1}$ et λ_i comme $\gamma_i \beta' \beta \gamma_i^{-1}$. Le dessin de Whitney[60] invite à considérer avec attention le lacet $\delta = \gamma_j \beta \gamma_i^{-1}$. Whitney détaille le processus de déformation montrant que λ_j est homotope au lacet $\gamma_j \beta \gamma_i^{-1} \gamma_i \beta' \beta \gamma_i^{-1} \gamma_i \beta^{-1} \gamma_j^{-1} = \delta \lambda_i \delta^{-1}$. L'homotopie résulte de ce que $\gamma_i^{-1}\gamma_i$ est contractile en O et de ce que $\beta\gamma_i^{-1}\gamma_i\beta^{-1}$ est contractile en V_j.

[60] Dessin que nous convions le lecteur à consulter, ainsi que les explications, p. 14.

On en déduit que le lacet $\lambda_j\lambda_i^{-1}$ est homotope au lacet $\delta\lambda_i\delta^{-1}\lambda_i^{-1}$. Le lacet δ représente un élément de $\mathfrak{F}$ donc la propriété exprimée ici est que les deux lacets λ_i et λ_j, qui sont bords homotopiques de la même chaîne y_i, diffèrent d'une quantité $\delta\lambda_i\delta^{-1}\lambda_i^{-1}$ qui est le commutateur d'un élément de $\mathfrak{F}$ et d'un élément de $\mathfrak{R}$.

L'étude menée par Hopf dans la situation générale est un peu plus compliquée mais repose essentiellement sur le résultat obtenu par l'analyse de Whitney. Les propositions f et g de la page 269 établissent qu'un lacet $\mathfrak{r}$ est bord-homotopique de la chaîne 0 si et seulement l'élément r de $\mathfrak{F}$ représenté par $\mathfrak{r}$ appartient à $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, où $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ désigne le sous-groupe de $\mathfrak{F}$ engendré par les éléments de la forme $xrx^{-1}r^{-1}$, avec x dans $\mathfrak{F}$ et r dans $\mathfrak{R}$.[61] La proposition h, p. 271, répond à la question de la manière suivante :

Soit $\mathfrak{r}$ un bord homotopique de Y ; l'ensemble des bords homotopiques de Y consiste alors en les lacets $\mathfrak{r}'$ pour lesquels $r \equiv r'$ mod. $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, où r et r' sont les éléments de $\mathfrak{R}$ représentés par $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$.

Les résultats énoncés permettent de définir une application $T : \mathfrak{L}^2 \to \dfrac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$. En effet toute 2-chaîne de K admet un bord homotopique ; on peut donc associer à tout élément de $\mathfrak{L}^2$ l'ensemble de ses bords homotopiques – qui représentent des éléments de $\mathfrak{R}$. Comme deux éléments de $\mathfrak{R}$ sont représentés par les bords homotopiques d'une même 2-chaîne si et seulement s'ils diffèrent d'un élément de $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, on peut définir une application T en associant à toute 2-chaîne la classe modulo $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ des éléments de $\mathfrak{R}$ représentés par ses bords homotopiques. La proposition d de Hopf prouve en outre que T est un morphisme de groupes.

Hopf introduit ensuite la notion de “Kugelbild”. Il s'agit des 2-chaînes $Y = \sum c_i y_i$, où les c_i correspondent au degré, dans chaque 2-simplexe y_i, d'une même application continue g d'une surface sphérique S dans $\overline{K^2}$. Hopf montre que les “Kugelbild” sont les 2-chaînes dont le bord homotopique consiste en un point[62]. Par conséquent, une 2-chaîne Y est une “Kugelbild” si et seulement si les bords homotopiques de Y représentent les éléments de $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$. On obtient ainsi le noyau du morphisme T. Si l'on note $\overline{\mathfrak{S}}^2$ l'ensemble des “Kugelbild” de K, on a donc $\mathrm{Ker}(T) = \overline{\mathfrak{S}}^2$.

Hopf fait la remarque (p. 272) que les “Kugelbild” sont des cycles. Il s'intéresse donc ensuite à la caractérisation des 2-cycles en termes de propriétés sur leurs bords homotopiques. Les “Kugelbild” sont les 2-chaînes dont le bord

[61] Il est à noter que $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ est inclus dans $\mathfrak{R}$ vu que $\mathfrak{R}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{F}$.

[62] Une façon de le voir est de considérer l'homéomorphie entre une surface sphérique et un disque dont le bord est identifié à un point

homotopique consiste en un point, c'est-à-dire correspond à la 1-chaîne 0. Il est connu de Hopf que les 1-chaînes nulles correspondent à des éléments du groupe des commutateurs $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{F}$.[63] Etant donné que les cycles sont les éléments de bords nuls, il n'est pas étonnant de voir Hopf parvenir à montrer qu'un élément Y est un 2-cycle si et seulement si ses bords homotopiques représentent des éléments de $\mathfrak{C}$.

Si maintenant l'on restreint l'application T aux cycles[64], il découle des résultats précédents, et du fait que $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ est inclus dans $\mathfrak{C}$, qu'on obtient un morphisme $T : \mathfrak{Z}^2 \to \dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$, où $\mathfrak{Z}^2$ désigne le groupe des 2-cycles de K. Les "Kugelbild" étant des cycles, T induit un isomorphisme

$$\frac{\mathfrak{Z}^2}{\overline{\mathfrak{S}}^2} \cong \frac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}.$$

Maintenant quel est le lien entre l'étude qui précède et l'homologie en dimension 2 ? Les objets impliqués, en particulier les 2-cycles et les "Kugelbild", n'y sont évidemment pas étrangers. Hopf précise le lien existant entre le groupe $\dfrac{\mathfrak{Z}^2}{\overline{\mathfrak{S}}^2}$ et le deuxième groupe d'homologie. Si l'on considère le sous-groupe $\mathfrak{H}^2$ de $\mathfrak{Z}^2$ consistant en les 2-cycles homologues à 0, le quotient $\mathfrak{B}^2 = \dfrac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{H}^2}$ définit comme à l'accoutumée le deuxième groupe d'homologie de K. Le groupe $\mathfrak{H}^2$ est engendré par les bords des 3-simplexes de K ; ces bords sont des "Kugelbild" donc $\mathfrak{H}^2$ est inclus dans $\overline{\mathfrak{S}}^2$. On peut ainsi former le groupe $\mathfrak{S}^2 = \dfrac{\overline{\mathfrak{S}}^2}{\mathfrak{H}^2}$ dont les éléments sont les classes d'homologie des "Kugelbild".

Un théorème classique sur les quotients établit l'isomorphisme $\dfrac{\mathfrak{Z}^2}{\overline{\mathfrak{S}}^2} \cong \dfrac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2}$ qui a pour conséquence :

$$\frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2} \cong \frac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}.$$

Le groupe $\dfrac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2}$ est un invariant topologique du polyèdre $\overline{K}$, de même que $\mathfrak{G}$. Néanmoins, selon la décomposition simpliciale – et donc le complexe K – choisie pour le polyèdre $\overline{K}$, K^1 peut différer, et $\mathfrak{F}$ également. L'isomorphisme

[63] C'est le genre de résultats que l'on trouve dans le classique [212]. Le résultat traduit notamment l'intuition selon laquelle tout 1-simplexe doit être parcouru autant de fois dans le sens positif que dans le sens négatif.

[64] Nous continuerons à l'appeler T.

précédent contient donc en outre la propriété que le groupe $\dfrac{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$ est indépendant du groupe libre $\mathfrak{F}$ associé à la décomposition simpliciale choisie pour $\overline{K}$: ce groupe $\dfrac{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$ sera également noté $\mathfrak{G}_1^*$, ce qui permet de signifier sa seule dépendance en $\mathfrak{G}$.

Dans l'ordre de l'article, cette indépendance du groupe quotient a déjà été prouvée par Hopf, de manière algébrique. Nous pensons néanmoins, au vu d'arguments explicités plus haut, que c'est plus logiquement en arrivant, suite à son étude topologique, à cette invariance jusque-là insoupçonnée, que Hopf a pu vouloir la démontrer dans un contexte purement algébrique.

6.2.2 Une construction algébrique

Nous traitons donc dans cette section ce qui fait l'objet du premier paragraphe de l'article de Hopf. Il s'agit d'une construction algébrique aux principes généraux mais dont le seul but est, comme on s'en rend compte à la fin du paragraphe, de prouver, pour un groupe $\mathfrak{G}$ quelconque, que le quotient $\dfrac{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$ est indépendant du groupe libre $\mathfrak{F}$ tel qu'il existe un morphisme surjectif $F : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ de noyau $\mathfrak{R}$.[65]

Nous n'entrerons pas dans les détails des démonstrations, voulant juste donner les idées essentielles de la construction.

Hopf associe au groupe $\mathfrak{G}$ l'ensemble $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ consistant en les $2n$-uplets ordonnés $(X_1, Y_1, ..., X_n, Y_n)$ où n décrit l'ensemble des entiers naturels et où les X_i et Y_i (qui vont toujours par paire) sont des éléments de $\mathfrak{G}$. Cet ensemble est muni d'une addition ; si $\alpha = (X_1, ..., Y_n)$ et $\beta = (U_1, ..., V_m)$ sont deux éléments de $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ alors $\alpha+\beta$ est défini comme $(X_1, ..., Y_n, U_1, ..., V_m)$. Hopf définit également pour tout élément α de $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ son 'inverse', $-\alpha = (Y_n, X_n, ..., Y_1, X_1)$. L'addition sur $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ est une juxtaposition, qui évoque donc la composition des lacets. L'inversion renverse l'ordre des termes, de même que l'inversion dans les lacets revient à les parcourir dans le sens contraire.

Hopf se donne ensuite un groupe $\mathfrak{A}$ ainsi qu'un morphisme surjectif $A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{G}$ dont le noyau est appelé $\mathfrak{U}$. Ce morphisme étant surjectif, il existe, pour tous les éléments X_i, Y_i de $\mathfrak{G}$, des éléments a_i, b_i de $\mathfrak{A}$ tels que $A(a_i) = X_i$ et $A(b_i) = Y_i$; les a_i et b_i ne sont bien entendu déterminés que modulo $\mathfrak{U}$. Si

[65] Pour le dire autrement, le quotient $\dfrac{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$ est associé à une présentation via générateurs et relations de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$ désignant toujours le groupe dérivé de $\mathfrak{F}$; le but est de montrer que ce quotient est indépendant de la présentation.

l'on considère maintenant la quantité

$$C(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 ... b_{n-1}^{-1} a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1},$$

qui appartient au groupe dérivé $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$, on peut prouver qu'elle est uniquement déterminée par α, modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})$. On obtient ainsi, en associant à α la classe contenant $C(a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$ pour un certain choix des a_i et b_i, une application $q_A : \Gamma_{\mathfrak{G}} \to \dfrac{\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})}$, qui se trouve être un morphisme. Hopf note K_A le noyau de ce morphisme.

Maintenant que se passe-t-il si l'on se donne un morphisme surjectif $F : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ de noyau $\mathfrak{R}$, où $\mathfrak{F}$ est un groupe libre ? La liberté de $\mathfrak{F}$ permet à Hopf d'établir que K_F est inclus dans K_A. Si l'on prend à la place de $A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{G}$ un morphisme surjectif $F' : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{G}$ de noyau $\mathfrak{R}'$, avec $\mathfrak{F}'$ libre, on obtient donc $K_F \subset K_{F'}$, ce qui mène, en échangeant les rôles de F et F', à l'égalité $K_F = K_{F'}$. Les morphismes q_F et $q_{F'}$ induisent donc un isomorphisme entre $\dfrac{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})}$ et $\dfrac{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}'}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}'}(\mathfrak{R}')}$. Ainsi le groupe quotient $\dfrac{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})}$ est indépendant de la présentation par générateurs et relations, ce qui en fait un invariant algébrique de $\mathfrak{G}$, que Hopf note $\mathfrak{G}^*$. Poussant ses investigations plus avant, Hopf montre que le groupe $\mathfrak{G}_1^* = \dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})}$ est également un invariant algébrique. La première chose qu'il remarque au sujet de ce groupe est qu'il est commutatif, étant donné que le groupe dérivé de $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ est inclus dans le groupe dérivé de $\mathfrak{R}$, lui-même inclus dans $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$.

La construction décrite par Hopf s'affranchit donc du cadre topologique, et la présentation qu'il choisit d'en donner, en la plaçant en tête de son article, rend ceci plus manifeste encore. Pour autant, malgré la généralité affichée (considération d'un groupe $\mathfrak{G}$ quelconque, dont il n'est jamais dit qu'il peut être le groupe fondamental d'un complexe, constructions faisant intervenir un groupe $\mathfrak{A}$ quelconque avant de s'intéresser aux groupes libres, utilisation privilégiée de la présentation par générateurs et relations), les investigations convergent au final vers le seul groupe $\mathfrak{G}_1^* = \dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})}$, qui est bien la motivation essentielle des considérations algébriques de Hopf.

6.2.3 Quelles places pour l'algèbre et la topologie ?

Nous avons essayé de montrer que, malgré l'ordre suivi par Hopf dans la présentation de ses résultats, le questionnement topologique a certainement précédé le questionnement algébrique. Alors, au-delà du souci d'une présentation commençant par les concepts les plus abstraits et généraux possibles avant d'aller vers une application au cadre topologique, quelles raisons motivent cette importance accordée par Hopf aux résultats purement algébriques ?

Pour comprendre cela il convient de regarder dans un premier temps, dans la suite de l'article, les conséquences que Hopf tirent de ses constructions algébriques et topologiques. Il s'agit tout d'abord de corollaires élémentaires de l'isomorphisme $\mathfrak{G}_1^* \cong \dfrac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2}$.

Hopf commence par exploiter, dans les pages 277 à 279, l'idée que l'isomorphisme précédent donne une borne inférieure, en l'occurrence $\mathfrak{G}_1^*$, pour le deuxième groupe d'homologie d'un complexe K de groupe fondamental $\mathfrak{G}$. On voit aisément que si $\mathfrak{G}_1^*$ est non nul il en est de même de $\mathfrak{B}^2$; dans ce cas, le complexe n'est donc pas acyclique en dimension 2. Si un complexe K vérifie $\mathfrak{S}^2 = 0$, c'est-à-dire si toutes les images continues d'une 2-sphère dans $\overline{K}$ sont homologues à 0,[66] alors $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}_1^*$. En conséquence deux complexes "homologie–asphärisch" en dimension 2 et de groupes fondamentaux isomorphes ont leurs deuxièmes groupes d'homologie isomorphes. Ce dernier point est, comme l'indique Hopf lui-même, très proche de la proposition I de Hurewicz que nous avons reproduite dans les pages précédentes. Si K est asphérique en dimension r, cela signifie que toutes les images continues d'une r-sphère dans $\overline{K}$ sont contractiles. Cela implique notamment que toutes les images continues d'une r-sphère sont homologues à 0 dans K et donc que ce complexe est "homologie-asphärisch" en dimension r. Le résultat de Hopf est donc un raffinement de celui de Hurewicz en dimension 2, vu que la condition "homotopie-asphärisch" est remplacée par la condition moins forte "homologie-asphärisch". Sans pouvoir en dire plus, Hopf pense que le lien clairement établi entre le groupe fondamental et le deuxième groupe d'homologie, ainsi que celui révélé par Hurewicz, sous des conditions d'acyclicité, entre le groupe fondamental et le n-ième groupe d'homotopie, posent la question d'une généralisation de la construction de Hopf en dimension 2 aux dimensions supérieures, afin de lier le groupe fondamental aux n-ièmes groupes d'homologie[67].

Un peu plus loin Hopf démontre que $\mathfrak{G}_1^*$ est une borne optimale, au sens où, dès lors que $\mathfrak{G}$ peut être présenté à l'aide d'un nombre fini de générateurs et de relations, il existe un complexe de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ et de deuxième groupe d'homologie $\mathfrak{G}_1^*$. Ainsi il existe toujours un complexe pour lequel $\mathfrak{B}^2$ n'est pas plus grand que $\mathfrak{G}_1^*$.

On en arrive ensuite à un exemple de calculs de $\mathfrak{G}_1^*$. Hopf traite par ordre de difficulté croissante les cas où $\mathfrak{G}$ est un groupe libre, puis un groupe

[66]Hopf dit d'un tel complexe qu'il est "homologie-asphärisch" en dimension 2.

[67]Cette question sera abordée par Hopf dans le supplément [122] et développée dans l'article [123] qui sera au cœur de notre étude dans le chapitre suivant.

abélien libre de génération finie, et enfin un groupe abélien de génération finie. Il annonce qu'il a en sa possession, au vu de l'étude menée, deux méthodes permettant de calculer $\mathfrak{G}_1^*$ pour un groupe donné $\mathfrak{G}$. La première méthode est géométrique ; si l'on connaît un complexe de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ et "homologie-asphärisch" en dimension 2, alors il suffira de calculer son deuxième groupe d'homologie pour obtenir en même temps $\mathfrak{G}_1^*$. Mais on peut également procéder algébriquement en se donnant une présentation par générateurs et relations de $\mathfrak{G}$ puis en calculant le quotient $\dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})}$.

Dans le cas où $\mathfrak{G}$ est un groupe libre, les deux méthodes se traduisent par un raisonnement simple et extrêmement rapide conduisant à l'égalité $\mathfrak{G}_1^* = 0$.

Si $\mathfrak{G}$ est un groupe abélien libre à p générateurs, la méthode géométrique consiste à considérer le produit topologique de p cercles ; cet objet est d'homotopie triviale en toute dimension supérieure à 2, donc en particulier "homologie-asphärisch" en dimension 2, et les formules (de Künneth) sur les groupes d'homologie d'un produit permettent de montrer que son deuxième groupe d'homologie est un groupe abélien libre à $\dfrac{p(p-1)}{2}$ générateurs. Hopf ne donne par contre pas de raisonnement algébrique pour le calcul de $\mathfrak{G}_1^*$ mais il montre qu'il peut déduire du résultat obtenu géométriquement une proposition algébrique. Il s'agit, en l'occurrence, du fait que le quotient $\dfrac{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2}$, où $\mathfrak{F}$ est libre et $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ désigne son deuxième groupe dérivé, est un groupe abélien libre de rang $\dfrac{p(p-1)}{2}$.

Lorsqu'enfin $\mathfrak{G}$ est un groupe abélien de génération finie, là encore une méthode géométrique est donnée mais pas de méthode algébrique.

La méthode géométrique est assez efficace car la construction d'un complexe ayant $\mathfrak{G}$ pour groupe fondamental ne présente, dans les exemples traités, aucune difficulté, et parce qu'en plus Hopf parvient à les prendre d'homotopie triviale en dimension 2, ce qui assure que $\mathfrak{S}^2 = 0$; il n'y a alors qu'à calculer le deuxième groupe d'homologie. Si la méthode algébrique n'est pas plus utilisée c'est assurément parce qu'elle est difficile à mettre en œuvre. Les connaissances accumulées jusqu'alors en topologie et la difficulté pratique à effectuer les calculs de la méthode algébrique expliquent à la fois l'efficacité de la méthode géométrique et le privilège que lui accorde Hopf au détriment de la méthode algébrique.

Mais alors, si la méthode algébrique est inefficace pratiquement, en tout cas inférieure à la méthode géométrique, pourquoi Hopf a-t-il choisi de détailler la construction abstraite de $\mathfrak{G}_1^*$ et de présenter le principal résultat de son article comme étant algébrique, aux conséquences topologiques ? Quel intérêt y a-t-il à connaître l'isomorphisme $\mathfrak{G}_1^* \cong \dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})}$ s'il n'est d'aucune utilité pour le calcul de $\mathfrak{G}_1^*$? Car c'est bien là qu'est le paradoxe de l'article de Hopf : il aurait très bien pu s'en tenir à la construction topologique reliant le groupe fondamental d'un complexe à son deuxième groupe d'homologie, ou alors donner la construction algébrique de $\mathfrak{G}_1^*$ dans un deuxième temps, afin de retrouver de manière algébrique l'indépendance de $\dfrac{(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})}$ relativement à la présentation par générateurs et relations. Le fait d'exhiber au tout début de l'article une construction algébrique de $\mathfrak{G}_1^*$ conduit d'emblée à penser que cette construction pourra être utilisée pour calculer le deuxième groupe d'homologie – ou au moins obtenir des informations à son sujet, modulo $\mathfrak{S}^2$ – mais il n'en est absolument rien. C'est même tout le contraire qui se passe car, non seulement les résultats de Hopf ne contiennent pas de connaissance réelle nouvelle en topologie, mais concernent plutôt le calcul de $\mathfrak{G}_1^*$. En fin de compte, Hopf introduit un objet algébrique $\mathfrak{G}_1^*$, inédit, qui a un rapport très important avec des objets courants de la topologie, mais qui est à première vue d'une utilité limitée pour la compréhension des objets topologiques, tandis que ces derniers sont utilisés pour le calculer. Il y a ici quelque chose qui, au premier abord, trouble le sens commun ; si l'on définit un nouvel objet, on cherche en général à s'en servir pour la compréhension de théories existantes plutôt qu'à utiliser des résultats déjà connus juste pour le déterminer...

6.2.4 Quelles perspectives ?

Nous avons avancé, en introduction à cette seconde partie, l'hypothèse selon laquelle Hopf n'a identifié un lien précis entre ses recherches et le travail de Hurewicz sur l'homotopie supérieure qu'a posteriori[68]. En effet, que ce soit dans [120], [121] ou [124], Hopf ne mentionne la proximité de son travail avec celui de Hurewicz qu'après avoir énoncé son résultat principal, mais jamais avant[69], ce qui aurait pu indiquer une source de motivation pour ses recherches. On comprend bien dans [124] la nature du rapport qu'il identifie entre son travail et celui de Hurewicz. Il reconnaît en le fait que le deuxième groupe d'homologie d'un espace "homologie-asphärisch" en dimension 2 est déterminé par le groupe fondamental (ce qui est une conséquence immédiate de l'isomorphisme $\mathfrak{G}_1^* \cong \dfrac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2}$) un raffinement, pour le cas $n = 2$, d'un résultat

[68]Nous entendons par là que les découvertes de Hurewicz n'ont pas été le point de départ des réflexions de Hopf.

[69]Au contraire notamment de son article [123] qui développe certaines des idées en germe dans [121] et dont l'introduction commence par un résultat de Hurewicz ; cf. le prochain chapitre.

général de Hurewicz[70]. Que le travail de Hopf n'était pas étranger à celui de Hurewicz était manifeste de par les concepts et objets impliqués. Mais c'est à la fin des investigations de Hopf que se voit préciser un lien concret, avec l'amélioration d'un résultat de Hurewicz. Et l'identification de ce lien stimulera les recherches de Hopf et l'amènera à poursuivre dans la voie ouverte par son article de 1942.[71]

Pour résumer, l'introduction de $\mathfrak{G}_1^*$ n'a pu être utilisée par Hopf afin de mettre l'algèbre au service de la topologie mais a, au contraire, ouvert la voie à l'exploitation de connaissances topologiques pour l'établissement de résultats algébriques. Un exemple présent dans le texte de Hopf concerne le calcul de $\frac{\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}}$ pour un groupe $\mathfrak{F}$ libre. Mais le point essentiel dépasse cette proposition de théorie des groupes. Le groupe $\mathfrak{G}_1^*$ peut être associé au groupe $\mathfrak{G}$ sans que la topologie n'intervienne dans le procédé. Il se trouve que si $\mathfrak{G}$ est le groupe fondamental d'un complexe K, $\mathfrak{G}_1^*$ a un lien étroit avec le deuxième groupe d'homologie de K, et est même exactement $\mathfrak{B}^2$ pour peu que K soit "homologie-asphärisch" en dimension 2. On sent poindre ici l'homologie des groupes, et le fait qu'elle soit définie peu après un autre article de Hopf[72] confirme cette impression. En effet, à un groupe quelconque $\mathfrak{G}$, que l'on connaît via une présentation par générateurs et relations, Hopf sait maintenant associer un groupe abélien $\mathfrak{G}_1^*$ qui est analogue au deuxième groupe d'homologie en topologie, et ce indépendamment de la présentation disponible. Les connaissances déjà acquises en topologie permettent de calculer plus aisément ce groupe $\mathfrak{G}_1^*$ que sa définition abstraite, et la topologie se met au service de l'algèbre. Qui plus est, le lien soulevé par Hopf entre ces travaux et ceux de Hurewicz, qui aboutit à l'idée d'une influence du groupe fondamental sur les groupes d'homologie en toute dimension[73], ouvre la porte à la recherche d'une généralisation de la construction de Hopf en toute dimension et, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, à la définition des groupes d'homologie en toute dimension associés à un groupe quelconque.

[70] On trouve le résultat en question dans la quatrième partie de [129] ; il stipule que les groupes d'homologie d'une certaine classe d'espaces (comprenant les complexes connexes) asphériques en dimension n, pour tout $n \geq 2$, sont déterminés par le groupe fondamental. Dans [124], Hopf présente une version légèrement différente de ce résultat. Traduit de l'allemand, cela donne : "Dans un complexe, dont les groupes d'homotopie en dimension r, pour $r = 2, 3, ..., n$, sont nuls, le n-ième groupe d'homologie est totalement déterminé par le groupe fondamental".

[71] Cf. [123].

[72] Ibid.

[73] Cf. p. 278 : "Die Frage, auf welche Weise die Struktur der in dem Satz genannten n-ten Bettischen Gruppe durch die Fundamentalgruppe bestimmt sei, ist für $n = 2$ durch die Angabe der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ beantwortet."

Cet article de Hopf franchit donc un nouveau palier dans l'algébrisation de la topologie. L'influence de Noether sur le développement de la topologie à la fin des années 20 avait permis de mettre l'algèbre, et en particulier la théorie des groupes, au service de la topologie. Cette influence apporta un changement dans les méthodes utilisées, dans la généralité observée, mais les objets d'étude restèrent les mêmes, à savoir des objets géométriques ou d'inspiration géométrique, comme les sphères, les polyèdres, les complexes, etc. Mais l'idée d'associer à un groupe un groupe abélien, qu'on pourrait appeler par analogie "deuxième groupe d'homologie", rend la topologie par essence même beaucoup plus algébrique, vu que les objets algébriques deviennent ses objets d'étude, et que la topologie se met à son service. Une coïncidence, néanmoins assez significative, veut que la première occurrence de la terminologie "topologie algébrique", ou d'un de ses équivalents en anglais ou allemand, dans le titre d'une source référencée par MathSciNet ou Zentralblatt, date justement de 1942.[74] Alors que cette terminologie commence juste à se répandre, ce dont traite l'article [121] de Hopf s'apparente déjà à ce qu'on pourrait appeler de l'algèbre topologique.

[74]Il s'agit du traité *Algebraic Topology* de Lefschetz. Nous ne soutenons pas l'idée que l'article de Hopf ait à lui seul amené l'adoption de la terminologie "topologie algébrique". Il n'y a qu'à exhiber des exemples antérieurs de l'utilisation de cette expression, comme on en trouve dans la préface de [212] en 1934 et même chez Alexandroff en 1932 dans [9], pour se convaincre du contraire. Cependant l'utilisation de cette expression est restée cantonnée essentiellement à la sphère d'influence germanique jusqu'au début des années 1940. Il semble vain de tenter d'identifier par des méthodes quantitatives l'influence de l'article de Hopf sur l'adoption de cette terminologie, étant donné que l'on peut difficilement établir par cette voie la cause réelle de son adoption dans les différentes sources où on la verra apparaître. C'est pour toutes ses raisons que nous présentons cette première occurrence de l'expression "topologie algébrique" comme une coïncidence. Mais nous sommes convaincus que l'article de Hopf, qui s'inscrit certes dans un mouvement plus global d'évolution de la topologie, a une part non négligeable dans l'adoption de cette terminologie, de part son contenu et son influence sur divers travaux majeurs de la topologie de l'époque – influence que nous mettrons en évidence dans le prochain chapitre.

Chapitre 7

Sur l'homologie des groupes : le développement de Hopf

Comme nous l'avons dit précédemment, Mac Lane a indiqué plusieurs travaux directement influencés et motivés par l'article [121] de 1942 de Hopf au sujet du deuxième groupe d'homologie. Le premier auquel nous nous intéressons est celui de Hopf lui-même : ceci nous permet de tirer profit des analyses déjà produites lors du chapitre précédent. Nous nous pencherons dans les prochains chapitres sur les développements menés parallèlement par Eilenberg et Mac Lane, Freudenthal et Eckmann.

Nous avons expliqué que nous pensions que ce n'est qu'au cours de ses recherches sur le deuxième groupe d'homologie que Hopf a vu se dégager des points communs forts avec les investigations de Hurewicz sur l'homotopie supérieure, et le développement, la recherche d'une meilleure compréhension de la proximité entre son travail et celui de Hurewicz, sont arrivés corrélativement et ont poussé Hopf à s'y intéresser de plus près par la suite. L'article de 1945, *Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören* [123], expose les fruits de cette réflexion. Le fait que dans cet article Hopf place d'emblée, contrairement à [121], ses réflexions dans la même sphère que celles de Hurewicz, semble conforter notre point de vue.

Le supplément [122] à l'article de 1942 de Hopf montre évidemment comment se fait la transition entre son article sur le deuxième groupe d'homologie et celui de 1945 dont le titre comporte l'idée de groupes de Betti (terminologie à laquelle nous substituerons l'appellation plus générale "groupes d'homologie") attachés à un groupe. L'importance des réflexions appartenant au même cercle d'idées que celles développées par Hurewicz y est on ne peut plus manifeste. Il s'agit d'un travail utilisant des résultats et des démonstrations de nature topologique et visant, comme prolongement des connaissances acquises sur le quotient $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ dans l'article de 1942, à étudier le quotient

$\mathfrak{B}^n/\mathfrak{S}^n$ ($\mathfrak{S}^n$ désignant, pour mémoire, le groupe des classes d'homologie des images continues de n-sphères). Hopf y établit notamment le résultat :

Pour un complexe connexe de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ et asphérique en dimensions r, pour $1 < r < n$, le groupe $\mathfrak{B}^n/\mathfrak{S}^n$ est entièrement déterminé par $\mathfrak{G}$.

Hopf rebondit sur ces résultats topologiques dans son article de 1945. L'introduction en est très éclairante. Il nous y indique ses motivations, ses influences, les questions en suspens et aussi son indécision devant l'importance à accorder à certaines de ses découvertes, exemple de la perplexité que peut connaître le mathématicien devant un champ nouveau de connaissances. Nous reviendrons sur ce dernier aspect après avoir examiné la teneur mathématique de son travail.

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, Hopf a reconnu en le fait que le deuxième groupe d'homologie d'un espace "homologie-asphärisch" en dimension 2 est déterminé par le groupe fondamental un raffinement, pour le cas $n = 2$, d'un résultat général de Hurewicz[1] stipulant que les groupes d'homologie d'une certaine classe d'espaces (comprenant les complexes connexes) asphériques[2] sont déterminés par le groupe fondamental. L'article de 1945 s'ouvre sur ce résultat de Hurewicz et le présente comme le point de départ des réflexions développées dans la suite du papier. Comme le rappelle Hopf, la preuve est purement topologique[3].

Le but avoué de Hopf est d'approfondir le résultat de Hurewicz. Celui-ci résulte en effet de considérations uniquement d'ordre topologique mais en aucun cas la dépendance des groupes d'homologie d'un espace asphérique en le groupe fondamental n'est expliquée d'un point de vue algébrique. Cette volonté de trouver une corrélation algébrique sous-tend l'article et se concrétise en particulier par un premier paragraphe qui traite exclusivement de questions algébriques.

Le premier paragraphe de son article consiste donc en une étude purement algébrique dont on peut affirmer sans trop s'avancer qu'elle est guidée à l'origine par la volonté de trouver un lien entre le groupe fondamental et

[1] Cf. [129], IV, p. 433.

[2] C'est-à-dire dont tous les groupes d'homotopie, excepté le premier, sont triviaux.

[3] Elle consiste à montrer que si deux espaces X et Y (vérifiant des conditions que nous ne détaillons pas ici, il nous suffit de savoir que les complexes les vérifient) ont des groupes fondamentaux isomorphes, on peut construire grâce à cet isomorphisme et à son inverse une équivalence d'homotopie entre X et Y. De cette équivalence d'homotopie résulte évidemment les isomorphismes entre les groupes d'homologie de X et de Y, mais en aucun cas n'a-t-on idée d'une manière de déterminer les groupes d'homologie de ces espaces en fonction du groupe fondamental.

les groupes d'homologie d'un espace asphérique. Hopf annonce simplement avoir décelé un procédé algébrique permettant d'associer à un groupe $\mathfrak{G}$ et un anneau unitaire J une suite de groupes $(\mathfrak{G}^n_J)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le rôle en topologie sera explicité dans un deuxième temps. Nous noterons avec intérêt l'aide que Hopf reconnaît avoir trouvée dans les travaux de Kurt Reidemeister et en particulier dans la notion d'"anneau du groupe" ("Gruppenring").

Avant donc d'aborder l'analyse de l'article de Hopf, nous commencerons par nous pencher sur l'article [191] de Reidemeister reconnu comme source principale de Hopf pour l'utilisation de l'anneau du groupe. Nous prêterons une grande attention aux considérations de Reidemeister où groupe fondamental, homotopie supérieure, revêtements et homologie se mêlent, ce qui nous permettra de comprendre ensuite de quelle manière Hopf a adapté les idées qu'il y a puisées.

7.1 Des revêtements

On peut noter que dans la quatrième partie de [129], où se trouve le résultat originel de Hurewicz, est fait un usage crucial du "revêtement universel" d'un espace. Cet objet est très utile en homotopie et s'avère également essentiel dans les articles de Reidemeister et de Hopf que nous allons analyser dans ce chapitre : comme de plus il joue un rôle important dans la définition de l'homologie des groupes, il apparaît nécessaire de lui consacrer ici un développement.

Nous n'avons cependant pas pour objectif ici de tracer une histoire du développement du concept de revêtement, celle-ci n'étant pas directement liée avec notre étude. Nous nous contenterons de donner au lecteur l'essentiel de ce qu'il y a à savoir sur les propriétés des revêtements pour en comprendre la manipulation, et nous détaillerons la définition de Seifert et Threlfall (1934) qui donne une idée suffisante et claire de ce que Reidemeister et Hopf pouvaient avoir en tête en utilisant cet objet.

Les revêtements n'étaient pas une nouveauté dans les années 1930 ; les idées les entourant trouvent leur origine dans la thèse de Riemann[4] sur les fonctions analytiques d'une variable complexe et son utilisation de surfaces "couvrant" un domaine du plan complexe. Pour faire court, un revêtement d'un espace X est un espace Y muni d'une projection p de Y sur X satisfaisant certaines propriétés (que nous détaillons par la suite). Selon Jean Dieudonné[5], bien que ceci n'ait pas été formulé ou en tout cas démontré clai-

[4] Cf. [192].

[5] Cf. [55] p. 296.

rement avant 1934, était implicitement reconnue aux revêtements, par des topologues comme Poincaré, Tietze ou Dehn, la propriété de “relèvement des homotopies”. Celle-ci consiste en deux points :

- si $\beta : [0,1] \to X$ est un chemin sur X avec $\beta(0) = a$ alors pour tout point b de $p^{-1}(a)$ il existe un unique chemin $\gamma : [0,1] \to Y$ (appelé relèvement) sur Y tel que $\gamma(0) = b$ et $\beta = p \circ \gamma$;
- si $\beta : [0,1] \to X$ et $\beta^{'} : [0,1] \to X$ sont deux chemins sur X de même origine a et si $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to X$ est une homotopie dans X entre β et $\beta^{'}$ fixant a, alors il existe une homotopie $\psi : [0,1] \times [0,1] \to Y$ entre les relevés respectifs de β et $\beta^{'}$ ayant même origine, et telle que $\varphi = P \circ \psi$.

Ces propriétés furent, selon Dieudonné, établies par Weyl dans le cadre des surfaces dans [239] (1913).

La référence à partir du milieu des années 1930 en matière de revêtement se trouve être le célèbre *Lehrbuch der Topologie* [212] de Seifert et Threlfall. Ce livre est un des deux traités références de cette période en topologie avec le *Topologie* [10] d'Alexandroff et Hopf. On peut par exemple appréhender l'importance de ce traité en ce qui concerne la notion de revêtement via le fait qu'il s'agit de la référence de F. Marty pour son exposé “Recouvrements - groupe fondamental” lors de la troisième année du séminaire Julia en 1935/36[6].

Le *Lehrbuch der Topologie*, s'il ne se distingue pas réellement des traités jusqu'alors disponibles en topologie (comme le *Topology* d'un Lefschetz [143]), présente néanmoins les concepts et les résultats de ce domaine avec une clarté jamais atteinte jusqu'alors, et s'est trouvé d'un abord très commode pour les étudiants. Ce traité semble en particulier avoir constitué une véritable avancée dans le traitement des revêtements en mettant l'accent sur le lien entre les sous-groupes du groupe fondamental d'un complexe et ses revêtements en utilisant la propriété de relèvement des homotopies[7]. Le traitement des revêtements proposé par Seifert et Threlfall rend le concept clair et maniable dans le cadre des complexes simpliciaux, et les propriétés dégagées se retrouvent pour l'essentiel à l'identique dans le cadre plus vaste des espaces.

[6]Cf. [108].

[7]Cf. [55] pp. 296-7 : “It was only in 1934 that, in their book (..), Seifert and threlfall gave an admirable thorough elaboration of the relations between fundamental groups and covering spaces based on the path lifting theorem : although limited to locally finite simplicial theorems, it is essentially definitive, and can be extended to more general spaces with only minor modifications.”

7.1.1 Le traitement des revêtements dans le *Lehrbuch der Topologie*

Nous détaillons ici le principe des revêtements d'un complexe connexe[8] tel qu'exposé dans le manuel de Seifert et Threlfall [212].

Etant donné un complexe K, le complexe $\widetilde{K}$ est un revêtement de K s'il existe une application continue G de $\widetilde{K}$ sur K telle que :

1. tout point P de K est l'image par G d'au moins un point $\widetilde{P}$ de $\widetilde{K}$ (on dit que $\widetilde{P}$ est au-dessus de P) ;
2. si $\widetilde{P_1}$, $\widetilde{P_2}$,... sont au-dessus de P alors il existe des voisinages $\mathfrak{U}(P)$, $\mathfrak{U}(\widetilde{P_1}), \mathfrak{U}(\widetilde{P_2})$,... tels que G induit un homéomorphisme de $\mathfrak{U}(\widetilde{P_1}), \mathfrak{U}(\widetilde{P_2})$,... sur $\mathfrak{U}(P)$;
3. un point de $\widetilde{K}$ se situant au-dessus d'un point de $\mathfrak{U}(P)$ appartient à au moins un des voisinages $\mathfrak{U}(\widetilde{P_1})$, $\mathfrak{U}(\widetilde{P_2})$,...

Dans le paragraphe 55 de [212], les auteurs montrent comment construire un revêtement R d'un complexe K dont le groupe fondamental est un sous-groupe quelconque H du groupe fondamental F de K. Pour ce faire, ils commencent par introduire la notion de H-classe.

Soit donc fixé au départ un point O, sommet d'une décomposition simpliciale de K. Un sommet quelconque A de K définit des H-classes de la manière qui suit : deux chemins U et U' d'origine O et d'extrémité A sont dans une même H-classe si $UU'^{-1} \in H$. A chaque sommet A de K correspondent donc des H-classes $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,... L'idée est de construire le complexe R, revêtement de K, en prenant pour sommets[9] les classes $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,... obtenues en parcourant tous les sommets A de K. Les points situés au-dessus de A dans le revêtement sont donc les classes $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,...

Ainsi sont construits les sommets de R se situant au-dessus d'un sommet de K. Mais il faut définir plus généralement les simplexes de R se situant au-dessus des simplexes de K et donc signifier sous quelles conditions des sommets donnés $\bar{A}_i$, $\bar{B}_k$,... engendrent un simplexe de R. Pour ce faire, on commence par comparer des classes associées à des sommets d'un simplexe de K. Deux classes $\bar{A}_i$ et $\bar{B}_k$ sont dites voisines ("benachbart") si A et B sont les sommets d'un 1-simplexe c de K et si $UcV^{-1} \in H$, où U est un représentant de $\bar{A}_i$ et V un représentant de $\bar{B}_k$. Etant donné une H-classe $\bar{A}_i$ d'un sommet A de K, il existe, pour tout sommet B de K formant avec A les

[8]Les idées sont strictement les mêmes que celles motivant les revêtements de variétés.

[9]Nous faisons ici un raccourci pour la commodité du discours. Seifert et Threlfall parlent plutôt d'un domaine de sommets en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,...

sommets d'un 1-simplexe de K, exactement une H-classe $\bar{B}_k$ voisine de $\bar{A}_i$; un représentant de cette classe est le chemin Uc, où U est un représentant quelconque de $\bar{A}_i$.

Ensuite, si l'on considère un simplexe S de dimension supérieure à 2 de K, donc engendré par au moins 3 sommets A, B, C,... et si l'on fixe une H-classe $\bar{A}_i$ associée à A, il existe exactement une H-classe $\bar{B}_k$, $\bar{C}_l$,... associée à chaque sommet de S, de sorte que $\bar{A}_i$, $\bar{B}_k$, $\bar{C}_l$,... sont voisines deux à deux. En effet, prenons la classe $\bar{B}_k$, associée à B, voisine de $\bar{A}_i$, et la classe $\bar{C}_l$, associée à C, voisine de $\bar{A}_i$, il suffit de voir que $\bar{B}_k$ et $\bar{C}_l$ sont voisines (le raisonnement s'appliquant de même aux autres sommets de S). Pour ce faire, soit U un chemin représentant de $\bar{A}_i$, et a, b, c les simplexes orientés CB, AC et AB ; d'après ce qui précède, Ub et Uc sont des représentants respectifs de $\bar{C}_l$ et $\bar{B}_k$. Ces classes sont voisines si $Ub.a.(Uc)^{-1}$ est dans H. Or le chemin bac^{-1} décrit le bord du 2-simplexe engendré par A, B et C donc $Ub.a.(Uc)^{-1}$ est une boucle[10] autour de ce simplexe, donc est homotope au lacet constant en O, et correspond finalement à l'élément neutre du groupe fondamental, élément qui est également dans H. Finalement, les classes $\bar{A}_i$, $\bar{B}_k$, $\bar{C}_l$ sont bien deux à deux voisines.

Au bout du compte, on obtient un complexe R, revêtement de K, en prenant pour chaque simplexe S de K engendré par les sommets A, B, C,... tous les simplexes engendrés par les H-classes $\bar{A}_i$, $\bar{B}_k$, $\bar{C}_l$,... deux à deux voisines (et on a vu précédemment qu'il existait autant de simplexes de ce genre qu'il y a de H-classes, vu que le choix d'une H-classe $\bar{A}_i$ détermine toutes les autres).

Le complexe ainsi obtenu est bien de groupe fondamental H car, si l'on choisit un sommet $\bar{O}_1$ au-dessus de O, et un chemin d'arêtes fermé U d'origine O et représentant un élément de H, alors lorsqu'on regarde le chemin d'arêtes décrit au-dessus de U, dans R, on constate qu'il revient en $\bar{O}_1$ car il parcourt des sommets successifs qui sont tous des classes voisines ; il s'agit donc d'un représentant d'un élément du groupe fondamental de R. Si par contre le chemin U ne représente pas un élément de H, son relevé dans R terminera en un point $\bar{O}_2$ distinct du point de départ, car ne se trouvant pas dans la même H-classe.

Le revêtement universel[11] est celui obtenu en prenant le groupe H réduit à l'élément identité. Il est simplement connexe et est un revêtement de tout autre revêtement de K.

[10]Pour reprendre la terminologie de Hopf détaillée dans le chapitre précédent.

[11]Il est "universel" au sens où il est revêtement de tout autre revêtement.

A titre de comparaison, voici la définition utilisée par Hurewicz[12] pour le revêtement universel : étant donné un espace Y localement connexe en toute dimension et un point fixé y_0 de Y, le revêtement universel Y^* de Y est l'ensemble des chemins d'origine y_0 modulo la relation considérant comme équivalents deux chemins de mêmes origines et extrémités susceptibles d'être déformés continûment l'un en l'autre. Il est manifeste que cette définition est l'analogue dans le cadre des espaces de la définition proposée par Seifert et Threlfall pour les complexes simpliciaux.

Si Hurewicz s'est intéressé aux revêtements universels, c'est que les propriétés de l'espace (appelé "base") Y se retrouvent dans le revêtement universel Y^* et que cet objet est plus simple. En effet d'une part il est localement connexe en toute dimension et possède les même groupes d'homotopie que Y en toute dimension sauf 1, d'autre part le groupe fondamental de Y^* est trivial donc, lorsque Y est supposé asphérique, tous les groupes d'homotopie de Y^* sont triviaux, ce qui en fait un espace contractile.

7.1.2 L'utilisation des revêtements par Reidemeister et l'anneau d'un groupe

Kurt Reidemeister était un mathématicien allemand, né à Brunswick (Braunschweig) en 1893 et décédé à Göttingen en 1971. Après avoir mené une thèse (soutenue en 1921) en théorie algébrique des nombres, il abandonna totalement ce domaine et reste finalement connu pour ses contributions à la topologie (en particulier la théorie des nœuds) et la théorie combinatoire des groupes[13]. C'est apparemment par Wirtinger, durant ses années à Vienne (1922-25), que l'intérêt de Reidemeister pour la topologie fut éveillé[14].

Il fut engagé à Königsberg en 1925[15] mais fut suspendu de ses fonctions en 1933 par le régime nazi peu après que la Prusse fut intégrée au IIIe Reich. Ce n'est qu'à l'automne 1934 qu'il retrouva un poste, à Marburg.

L'article *Homotopiegruppen von Komplexen* [191] de Reidemeister qui nous intéresse ici fut publié en 1934 mais il l'écrivit alors qu'il se trouvait encore à Königsberg, donc au plus tard en 1933. Le titre lui-même doit nous interpeller car on y remarque la mention de la notion de "groupes d'homotopie" avant même la parution des articles de Hurewicz, et d'ailleurs probablement à une époque où les recherches de ce dernier sur l'homotopie supérieure

[12] Cf. [129] IV. p. 215.
[13] Cf. [39] p. 90-91.
[14] *Ibid.*
[15] Cf. [15].

commençaient à peine. Pour mémoire, Hurewicz était alors l'assistant de Brouwer à Amsterdam et on ne peut donc imaginer un rapport étroit entre Hurewicz et Reidemeister qui put expliquer qu'ils travaillaient sur un même sujet pourtant très peu répandu. On ne peut non plus supposer un rapport étroit avec Čech qui était en fonction en Tchécoslovaquie et l'on peut également noter que Reidemeister n'a pas assisté au Congrès International des Mathématiciens de 1932 au cours duquel Čech exposa sa définition de groupe d'homotopie supérieure[16].

Au vu du chapitre précédent et de l'absence de rapport clair entre Reidemeister et les principaux acteurs du développement de l'homotopie supérieure à la même époque, il est légitime de se demander ce que sont les groupes d'homotopie introduits par Reidemeister, et notamment de déterminer si ce sont les mêmes objets que ceux introduits par Čech et Hurewicz. Ceci renforce encore l'intérêt que l'on peut trouver dans cet article.

Reidemeister avait déjà abordé diverses questions en lien avec le groupe fondamental. Il semble notamment que Wirtinger lui avait montré comment calculer le groupe fondamental d'un nœud à partir de sa projection. On pourra noter en particulier que Reidemeister intervint au Congrès International des Mathématiciens de 1928 avec un exposé [189] concernant le groupe fondamental et les revêtements des variétés. Reidemeister était conscient du lien entre les sous-groupes du groupe fondamental d'une variété et les revêtements de celle-ci. Pour lui qui avait travaillé en théorie combinatoire des groupes, domaine hautement concerné par la recherche de renseignements au sujet du groupe fondamental étant donné que cet objet est, en pratique, obtenu par générateurs et relations, se posait naturellement le problème de déterminer le lien entre les propriétés structurelles du groupe fondamental d'une variété et les propriétés topologiques de celle-ci[17], ce qui peut se faire en utilisant les revêtements.

Seifert et Threlfall nous offrent d'ailleurs en conclusion des chapitres traitant des revêtements, un parallèle entre leur approche de ces objets et celle de Reidemeister justement, telle qu'on la trouve en particulier dans [188] et [190]. Si eux abordent la théorie des revêtements d'un complexe à l'aide de la théorie des groupes, dans les premiers travaux de Reideimeister les revêtements sont au contraire utilisés pour obtenir des résultats de théorie des groupes. Un des problèmes principaux examiné par Reidemeister, et qui provient de la théorie combinatoire des groupes, est la recherche de systèmes de

[16]On pourra s'en convaincre en examinant la liste des participants, cf. [1] pp. 27-36.

[17]Cf. [189] p. 319 : "Aber solche Klassifikationen erschienen rein formal, wenn sich nicht ein geometrisch bedeutungsvoller Zusammenhang zwischen der Struktur der Fundamentalgruppe und topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit einsehen liesse".

générateurs et relations d'un sous-groupe $\mathfrak{H}$ d'un groupe $\mathfrak{F}$ donné lui-même par générateurs et relations. Les revêtements sont un outil pertinent pour Reidemeister dans l'examen de cette question car il est possible de construire un complexe de dimension 2 de groupe fondamental $\mathfrak{F}$ et dont un des revêtements a pour groupe fondamental $\mathfrak{H}$.

Entrons dans l'analyse du contenu mathématique de l'article [191] de Reidemeister. Etant donné un complexe connexe C de dimension finie n, Reidemeister en considère le revêtement universel U. Celui-ci possède un groupe d'automorphismes $\mathfrak{G}$ qui est isomorphe au groupe fondamental de C.[18]

Il existe des domaines fondamentaux de U relativement à $\mathfrak{G}$, c'est-à-dire des ensembles $\{a_i^k, i = 1, ..., \alpha_k; k = 0, ..., n\}$ de k-cellules de U tels que toute k-cellule de U s'obtient de manière unique comme l'image d'un a_i^k par un automorphisme de $\mathfrak{G}$ (on obtient évidemment un domaine fondamental de U en choisissant un élément dans chaque orbite de U sous $\mathfrak{G}$). Un domaine fondamental $\{a_i^k, i = 1, ..., \alpha_k; k = 0, ..., n\}$ étant choisi, l'ensemble des cellules de U coïncide donc avec l'ensemble des éléments (tous distincts) de la forme γa_i^k, où γ parcourt $\mathfrak{G}$.

Si l'on considère maintenant les k-chaînes c_l^k sur U, c'est-à-dire les combinaisons linéaires à coefficients entiers des cellules de dimension k de U, et si on les écrit en utilisant uniquement les cellules d'un domaine fondamental fixé, elles apparaîtront sous la forme :

$$c_l^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_{li} a_i^k,$$

où les r_{li} sont des éléments de l'anneau $\mathfrak{R}$ formé des combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de $\mathfrak{G}$.[19]

La première question qui semble s'être posée à Reidemeister est de déterminer comment se traduit algébriquement, pour des chaînes $c_l^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_{li} a_i^k$ du revêtement universel U, le fait d'être au-dessus d'une même chaîne du complexe initial C. Deux cellules de U sont au-dessus d'une même cellule de C si et seulement si l'on peut passer de l'une à l'autre via l'action d'un élément de $\mathfrak{G}$. La projection de U sur C se fait donc concrètement en raisonnant "modulo $\mathfrak{G}$".[20] Si l'on considère deux chaînes $c_l^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_{li} a_i^k$ et $c_m^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_{mi} a_i^k$

[18] Ce qui revient à dire que le groupe fondamental de C opère sur U.

[19] En d'autres termes, $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$. Il s'agit bien d'un anneau vu que la multiplication s'y définit aisément en utilisant la composition de $\mathfrak{G}$. C'est ce qu'on appelle, depuis l'époque de cet article, l'anneau du groupe $\mathfrak{G}$.

[20] Une définition vient peu après.

de U, elles se projettent sur une même chaîne de C si et seulement si dans les $r_{li} = \sum_\alpha n_{li\alpha}\gamma_\alpha$ et les $r_{mi} = \sum_\alpha n_{mi\alpha}\gamma_\alpha$, on a $\sum_\alpha n_{li\alpha} = \sum_\alpha n_{mi\alpha}$ pour tout i. On peut donc définir une équivalence sur les groupes $\mathfrak{K}^k$ des chaînes de U d'une même dimension k en disant que c_l^k et c_m^k sont équivalentes si $\sum_\alpha n_{li\alpha} = \sum_\alpha n_{mi\alpha}$ pour tout i.

Reidemeister introduit en fait une notion plus générale de congruence modulo un sous-groupe $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{R}$ et dans les groupes $\mathfrak{K}^k$ des chaînes de U d'une même dimension k. La notion d'équivalence précédente en est un cas particulier, à savoir celui correspondant à $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}$.

Deux éléments r_1 et r_2 de $\mathfrak{R}$ sont dits congru modulo $\mathfrak{g}$, ce qu'on note $r_1 \equiv r_2 \bmod \mathfrak{g}$, si dans $r_1 - r_2$ toutes les sommes des coefficients des éléments γ_i de $\mathfrak{G}$ appartenant à une même classe (à droite, donc de la forme $\mathfrak{g}\rho$) modulo $\mathfrak{g}$ sont nulles. Cette notion de congruence s'étend immédiatement aux groupes $\mathfrak{K}^k$ en demandant que deux chaînes $c_1^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_{1i}a_i^k$ et $c_2^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_{2i}a_i^k$ soient congrues modulo $\mathfrak{g}$ si, pour tout i, $r_{1i} = r_{2i}$.

Les groupes de chaînes $\mathfrak{K}^k$ sont munis d'une structure de $\mathfrak{R}$-module à gauche. De même qu'il passe au quotient modulo $\mathfrak{G}$ dans les chaînes pour retrouver les groupes de chaînes de C, Reidemeister cherche à passer au quotient modulo $\mathfrak{g}$ tout en respectant la structure de $\mathfrak{R}$-module des groupes de chaînes. C'est possible si $\mathfrak{g}$ est distingué dans $\mathfrak{G}$. En effet, dans ce cas, si c_1^k et c_2^k sont congrues modulo $\mathfrak{g}$, il en va de même de γc_1^k et γc_2^k pour tout élément γ de $\mathfrak{G}$.[21]

Si $\mathfrak{g}$ est distingué dans $\mathfrak{G}$ donc, le groupe $\mathfrak{N}_\mathfrak{g}^k$ des k-chaînes de U congrues à la chaîne nulle modulo $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{R}$-module (à gauche). On peut donc définir les quotients $\mathfrak{K}^k/\mathfrak{N}_\mathfrak{g}^k$ pour tout sous-groupe distingué $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{G}$, et si $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}$, ce quotient donne exactement le module des k-chaînes de C.[22]

L'action de $\mathfrak{G}$ sur les chaînes de U préserve le fait d'être un bord ou non ; si R désigne l'application de bord définie sur le complexe U, on a donc, pour tout chaîne c^k de U et tout élément r de $\mathfrak{R}$, $R(rc^k) = rR(c^k)$. Le groupe $\mathfrak{K}_e^k$ des k-cycles de U est donc un $\mathfrak{R}$-module, de même que le groupe $\mathfrak{K}_0^k$ des k-bords de U. Reidemeister note $\mathfrak{K}_\mathfrak{g}^k$ le groupe des k-chaînes dont le bord est congru à la chaîne nulle modulo $\mathfrak{g}$. D'après ce qui précède ce groupe est également un $\mathfrak{R}$-module si $\mathfrak{g}$ est distingué dans $\mathfrak{G}$. Le module $\mathfrak{K}_\mathfrak{G}^k$ consiste en l'ensemble des k-chaînes de U situées au-dessus d'un k-cycle de C.

Le groupe $\mathfrak{K}_0^k$ est clairement un sous-groupe distingué de $\mathfrak{K}_\mathfrak{G}^k$. On peut donc former le quotient $\mathfrak{H}^k = \mathfrak{K}_\mathfrak{G}^k/\mathfrak{K}_0^k$ et ce quotient est ce que Reidemeister

[21] Ceci vient de ce que, si γ_1 et γ_2 sont deux éléments d'une même classe modulo $\mathfrak{g}$, il existe un élément g de $\mathfrak{g}$ tel que $\gamma_1 = g\gamma_2$. Il s'ensuit : $\gamma\gamma_1 = \gamma g\gamma_2 = \gamma g\gamma^{-1}\gamma\gamma_2$ et $\gamma g\gamma^{-1}$ est bien dans $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{G}$, d'où $\gamma\gamma_1$ et $\gamma\gamma_2$ sont bien congrus modulo $\mathfrak{g}$.

[22] Quotienter par $\mathfrak{N}_\mathfrak{G}^k$ revient en effet à passer aux chaînes modulo $\mathfrak{G}$.

nomme “groupe d’homotopie en dimension k” (“Homotopiegruppe k-ter Dimension”) de C. Il en définit aussi les “sous-groupes fermés modulo $\mathfrak{g}$” (“mod $\mathfrak{g}$ geschlossenen Untergruppe”) $\mathfrak{H}^k_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{K}^k_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{K}^k_0$.

Il faudrait entrer dans le détail des travaux de l’époque de Reidemeister pour bien cerner l’utilité qu’il pensait avoir de cet objet “groupe d’homotopie” ainsi que de ces sous-groupes fermés. Il ne s’agit évidemment pas de la même notion que celle introduite peu après par Hurewicz. La généralisation de Čech et de Hurewicz du groupe fondamental aux dimensions supérieures peut, sans réellement projeter de regard a posteriori dans ce jugement, sembler plus simple. Cet effet résulte vraisemblablement de ce que Reidemeister ne se situe pas dans la démarche de généralisation du groupe fondamental[23].

Ce qui le motive plutôt est le fait que l’action du groupe fondamental $\mathfrak{G}$ présente sur le revêtement universel U de C fournit finalement une structure de $\mathfrak{R}$-module, où $\mathfrak{R}$ est l’anneau du groupe $\mathfrak{G}$. Ainsi, même si les objets $\mathfrak{H}^k$ en eux-mêmes peuvent apparaître simples car ce sont tous des groupes abéliens, ils reflètent néanmoins l’action non triviale du groupe fondamental en toute dimension. De plus, lorsqu’on considère le groupe $\mathfrak{H}^k$ modulo $\mathfrak{G}$ (au sens où l’on considère les éléments de ce groupe modulo $\mathfrak{G}$), on retrouve le groupe d’homologie en dimension k de C.

7.2 L’homologie des groupes par Hopf

7.2.1 Une présentation purement algébrique

De même que dans [121], Hopf consacre dans cet article [123] de 1945 qui nous intéresse ici un premier paragraphe à une étude algébrique abstraite avant d’en donner, dans le deuxième paragraphe, une interprétation topologique. Là encore se pose donc la question de savoir quelle a été la démarche de Hopf dans ses recherches, et à quel point sa présentation traduit le souci de donner une priorité à certains concepts plutôt que de suivre le cheminement de pensée qui a été le sien lors des investigations ayant mené à l’écriture de cet article.

Comme souvent Hopf débute par des rappels théoriques élémentaires[24]. Si dans [118] ses rappels concernaient les groupes, et plus précisément les groupes abéliens de génération finie, si dans [121] ses rappels concernaient également les groupes mais avec l’accent mis sur les groupes libres, ses rappels

[23] On pourra remarquer que ses groupes d’homotopie sont abéliens en toute dimension : sa notion ne peut donc coïncider avec celle de groupe fondamental en dimension 1.

[24] Ils font l’objet dans son article du §1.1.

concernent dans l'article qui nous intéresse ici les modules[25] sur un anneau unitaire P, et plus particulièrement les modules libres. A noter l'introduction d'une notation souvent utilisée par la suite : si P_0 est un sous-module de P et Z un sous-groupe de X, est noté Z_0 le groupe, qui est aussi un P-module, constitué des sommes finies de la forme $\sum_i \nu_i z_i$, $\nu_i \in P_0$, $z_i \in Z$.

Dans le deuxième point de son premier paragraphe, Hopf introduit, étant donné un P-module J, la notion de (J, P)-suite ("(J, P)-Folge"). Il s'agit d'une suite de groupes

$$\{J = Z^{-1};\ X^0 \supset Z^0;\ X^1 \supset Z^1; ...;\ X^n \supset Z^n; ...\},$$

où les X^n sont des P-modules libres et les Z^n des sous-P-modules des X^n, tels qu'il existe des P-homomorphismes r_n de X^n sur Z^{n-1} de noyaux Z^n.

La définition de Hopf se traduit en termes modernes, à l'aide de la notation des morphismes sous forme de flèche et de la notion de suite exacte, de la manière suivante : une (J, P)-suite n'est rien d'autre qu'une suite exacte[26] de P-modules

$$0 \overset{r_{-1}}{\leftarrow} J \overset{r_0}{\leftarrow} X^0 \overset{r_1}{\leftarrow} ... \overset{r_{n-1}}{\leftarrow} X^{n-1} \overset{r_n}{\leftarrow} X^n \overset{r_{n+1}}{\leftarrow} ...$$

Plus précisément, sans autre hypothèse sur les X^n que le fait qu'il s'agit de P-modules, la suite exacte précédente est appelée communément "résolution de J par des P-modules". Lorsqu'on suppose de plus, comme le fait Hopf, que les X^n sont libres, on obtient une résolution dite "libre".

Comme tout P-module J peut être vu comme image homomorphe d'un module libre X_0 (c'est un des rappels effectués par Hopf dans le point précédent), qui peut lui-même être vu comme image homomorphe d'un module libre X_1, etc., il est clair qu'étant donné un anneau unitaire P et un P-module J quelconques il existe une (J, P)-suite. Il en existe même une infinité car dans le procédé que l'on vient de décrire, tout consiste à choisir une base de Z_{n-1} afin de construire X_n et r_n ; il y a une multiplicité de possibilités dans le choix d'une base (et donc une infinité au total vu que le choix se pose pour tout n de $\mathbb{N}$). En outre, on peut admettre dans la définition d'une (J, P)-suite le cas où il n'y a qu'un nombre fini de termes

$$\{J = Z^{-1};\ X^0 \supset Z^0;\ X^1 \supset Z^1; ...;\ X^{N-1} \supset Z^{N-1};\ X^N \supset Z^N\}$$

[25] On remarquera que Hopf précise également la terminologie "groupe abélien avec anneau d'opérateurs P" ("Abelsche Gruppen mit dem Operatorenring P").

[26] Lorsqu'on dit d'une telle suite qu'elle est exacte, cela signifie que, pour tout $n \geq -1$, $\mathrm{Im}(r_{n+1}) = Z^n = \mathrm{Ker}(r_n)$.

car on peut étendre une telle séquence en une (J, P)-suite infinie. Hopf donne lui-même le procédé ; étant donné Z^N, il existe un P-module libre X^{N+1} d'image Z^N via un certain homomorphisme r_{N+1}, et le noyau Z^{N+1} de ce morphisme est également un P-module. Et l'on répète ce procédé pour obtenir X^{N+2} à partir de Z^{N+1}, etc. Le principe de cette construction a déjà été utilisé de manière similaire par Hopf pour les groupes dans [121]. Concrètement il suffit de prendre une famille génératrice de Z^N et de définir X^{N+1} comme le P-module libre engendré par cette famille.

Comme les Z_0^n sont à la fois des sous-modules de X_0^n (car $X^n \subset Z^n$) et de Z^n, ce sont des sous-modules de $X_0^n \cap Z^n$ et l'on peut donc définir les modules quotients $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$. Le résultat principal du premier paragraphe (appelé "Satz I" par Hopf) consiste en ce qui suit :

Les groupes $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$ sont indépendants de la (J, P)-suite utilisée pour les calculer. Ils sont donc, étant donné un P-module J et un idéal bilatère P_0 de P, uniquement déterminés en tant que groupes abstraits, et notés $\Gamma^n(J, P, P_0)$.

Pour prouver ce résultat, il faut établir qu'étant donné deux (J, P)-suites ou, pour utiliser un langage plus récent, deux résolutions par des P-modules libres de J, i.e. deux suites

$$0 \overset{r_{-1}}{\leftarrow} J \overset{r_0}{\leftarrow} X^0 \overset{r_1}{\leftarrow} ... \overset{r_{n-1}}{\leftarrow} X^{n-1} \overset{r_n}{\leftarrow} X^n \overset{r_{n+1}}{\leftarrow} ..., \tag{1}$$

$$0 \overset{\bar{r}_{-1}}{\leftarrow} J \overset{\bar{r}_0}{\leftarrow} \bar{X}^0 \overset{\bar{r}_1}{\leftarrow} ... \overset{\bar{r}_{n-1}}{\leftarrow} \bar{X}^{n-1} \overset{\bar{r}_n}{\leftarrow} \bar{X}^n \overset{\bar{r}_{n+1}}{\leftarrow} ..., \tag{$\bar{1}$}$$

les groupes $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$ et $(\bar{X}_0^n \cap \bar{Z}^n)/\bar{Z}_0^n$ sont isomorphes. Hopf montre comment construire un isomorphisme entre ces deux quotients : c'est relativement facile car les X^n sont des modules libres, ce qui autorise à raisonner avec des bases de chacun d'entre eux. Ceci permet à Hopf de donner un procédé général de construction d'une application f de la (J, P)-suite (1) dans la (J, P)-suite $(\bar{1})$.[27] Une telle application fournit un morphisme en chaque degré n de $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$ dans $(\bar{X}_0^n \cap \bar{Z}^n)/\bar{Z}_0^n$. On peut de même construire une application $\bar{f}$ de X^n dans $\bar{X}^n$ qui fournira donc un morphisme de $(\bar{X}_0^n \cap \bar{Z}^n)/\bar{Z}_0^n$ dans $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$. Ainsi les applications $f\bar{f}$ et $\bar{f}f$ sont des applications respectivement de $(\bar{1})$ dans elle-même et de (1) dans elle-même. Hopf prouve que $\bar{f}f$ est l'identité sur $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$ et que $f\bar{f}$ est l'identité sur $(\bar{X}_0^n \cap \bar{Z}^n)/\bar{Z}_0^n$ donc que $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$ et $(\bar{X}_0^n \cap \bar{Z}^n)/\bar{Z}_0^n$ sont bien isomorphes.

[27] C'est-à-dire en fait une collection de morphismes f_n de P-modules, tels que $f_n : X^n \to \bar{X}^n$ et $\bar{r}_n f_n = f_n r_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. A noter que, comme c'est le cas chez Hopf d'ailleurs, les indices n sont souvent absents des notations usuelles, car sous-entendus.

Hopf sait donc associer des invariants algébriques $\Gamma^n(J, P, P_0)$ à un triplet (J, P, P_0). Dans le point suivant, il se concentre sur un choix spécifique des J, P et P_0 dont la considération lui vient bien sûr de l'application topologique qu'il fera dans le paragraphe suivant de ses résultats algébriques.

Etant donné un groupe $\mathfrak{G}$ quelconque (noté multiplicativement) et un anneau unitaire J quelconque, Hopf prend pour P l'anneau (qui est également unitaire) du groupe $\mathfrak{G}$ à coefficients dans J, que nous noterions $J[\mathfrak{G}]$.

Si $\alpha = \sum t_i A_i$ est un élément de $P = J[\mathfrak{G}]$, Hopf note $S(\alpha)$ l'élément $\sum t_i$ de J (S définit en fait un morphisme d'anneaux unitaires de P vers J). Ceci lui permet de munir J d'une structure de P-module en posant, pour α quelconque dans P et x quelconque dans J, $\alpha x = S(\alpha).x$.

Hopf prend ensuite pour P_0 le noyau de S, qui est bien un idéal bilatère.

Et ainsi, avec ces choix de P et P_0, Hopf définit les groupes $\mathfrak{G}_J^{n+1}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) comme étant égaux à $\Gamma^n(J, P, P_0)$, c'est-à-dire $\Gamma^n(J, J[\mathfrak{G}], \mathrm{Ker}(S))$.

Pour résumer, étant donné un groupe $\mathfrak{G}$ et un anneau unitaire J, Hopf leur associe une suite de groupes abéliens $\mathfrak{G}_J^1$, $\mathfrak{G}_J^2$,..., $\mathfrak{G}_J^n$,... qu'il appelle "groupes de Betti"[28] de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans J. Alors, à ce niveau de la lecture de Hopf, se pose évidemment la question : pourquoi ces groupes seraient le pendant, pour les groupes, des groupes d'homologie classiques des complexes en topologie ? Nous ne serons en mesure de répondre à cette question que plus loin dans ce chapitre car c'est bien sûr de l'application topologique des résultats de Hopf que se verront préciser les influences dont il a bénéficié et sa motivation à utiliser la terminologie propre à l'homologie dans ce contexte purement algébrique.

Pour conclure ce premier paragraphe, Hopf donne des précisions sur le groupe $\mathfrak{G}_J^1$. Il montre que ce groupe est isomorphe au quotient P_0/P_0^2 (ce qui simplifie le calcul vu que l'on n'a pas à trouver une résolution libre) et il montre même que $\mathfrak{G}_\mathbb{Z}^1$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$, où $\mathfrak{C}$ est le groupe des commutateurs de $\mathfrak{G}$. Le groupe $\mathfrak{G}_\mathbb{Z}^1$ n'est donc rien d'autre que l'abélianisé de $\mathfrak{G}$.

Etant donné la machinerie assez complexe consistant à trouver une résolution de J par des P-modules libres et à calculer les quotients $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$, il est légitime de chercher à caractériser autrement les groupes $\mathfrak{G}_J^{n+1}$, voire à les exprimer simplement. Le fait d'avoir obtenu une invariance des quotients $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$ en la résolution utilisée a dû forcément laisser penser à Hopf qu'il y avait des résultats profonds à tirer de ces recherches, d'autant plus si

[28] L'appellation est un peu étrange au sens où, en topologie, Hopf réserve – nous semble-t-il – le terme "Bettische Gruppe" pour les groupes d'homologie à coefficients entiers et utilise "Homologie Gruppe" pour des groupes d'homologie à coefficients quelconques. Néanmoins la référence à l'homologie en topologie est manifeste avec l'emploi de ce terme.

les $\mathfrak{G}_J^{n+1}$ pouvaient être exprimés de manière plus simple. Mais, et c'est la conclusion de son premier paragraphe, il n'est parvenu à exprimer de manière simple que le groupe $\mathfrak{G}_J^1$ et n'a pas réussi à faire de même pour les $\mathfrak{G}_J^n$ dès lors que $n > 1$, même en prenant des groupes $\mathfrak{G}$ assez simples. Il dit même être incapable de se prononcer sur la possibilité de ce faire[29]. Sa construction algébrique, qui servira comme nous le verrons rapidement à expliciter le lien entre homologie et homotopie dans le cadre algébrique, ne permet cependant pas une réelle effectivité. Il nous appartiendra donc de revenir plus tard sur la pertinence que trouve Hopf aux résultats que nous venons d'exposer.

Avant d'aller plus loin, nous voulons juste préciser pour le lecteur, à titre de comparaison, la définition standard de l'homologie des groupes à l'heure actuelle. Celle-ci (telle qu'on la trouve dans [32] par exemple) consiste, étant donné un groupe G, à partir d'une résolution projective[30] de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules F^n, $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire d'une suite exacte :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \overset{r_0}{\leftarrow} F^0 \overset{r_1}{\leftarrow} F^1 \overset{r_2}{\leftarrow} F^2 \overset{r_3}{\leftarrow} \ldots$$

On tensorise ensuite cette résolution par $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[G]$, ce qui transforme la suite exacte précédente en un complexe :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} F^0 \overset{id\otimes r_1}{\leftarrow} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} F^1 \overset{id\otimes r_2}{\leftarrow} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} F^2 \overset{id\otimes r_3}{\leftarrow} \ldots$$

On pourra noter que l'action de tensoriser, en associant comme ici à un $\mathbb{Z}[G]$-module M le module $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$, est un foncteur exact à droite ; c'est-à-dire que si l'on a une suite exacte $M' \to M \to M'' \to 0$, alors la suite $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M' \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M'' \to 0$ est également exacte. Cela signifie notamment que la surjectivité de r_0 implique la surjectivité de $id \otimes r_0$. Afin d'éviter de considérer cette information peu pertinente (qui ne donne aucune homologie en dimension 0), les flèches $0 \leftarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \overset{id\otimes r_0}{\leftarrow} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} F^0$ ont été contractées en $0 \leftarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} F^0$.

Autre remarque importante : $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ est isomorphe au quotient M_G de M par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $gm - m$. En quotientant par toutes les relations $gm - m$, on cherche manifestement à annihiler l'action de G sur M et le module M_G peut être décrit comme le plus grand quotient de M sur lequel G agit trivialement.

Le n-ième groupe d'homologie $H_n(G)$ de G est finalement défini comme le n-ième groupe d'homologie du complexe obtenu après tensorisation, c'est-à-dire :

$$H_n(G) = \mathrm{Ker}(id \otimes r_n)/\mathrm{Im}(id \otimes r_{n+1}).$$

[29] Ce qui semble un peu étonnant au vu de l'application topologique...

[30] Une résolution libre étant projective.

La définition moderne des groupes d'homologie que nous venons de donner n'est pas la même que celle de Hopf, même modulo la terminologie ! Partant d'une (J, P)-suite, c'est-à-dire finalement également une suite exacte :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{r_0} X^0 \xleftarrow{r_1} X^1 \xleftarrow{r_2} X^2 \xleftarrow{r_3} \ldots$$

ce que fait Hopf revient à tensoriser la suite par P_0 (et non par $\mathbb{Z}$) et à en calculer l'homologie. En effet, les X^n étant des P-modules libres, on peut montrer que X_0^n est isomorphe à $P_0 \otimes X^n$: si $E^n = \{e_1^n, e_2^n, \ldots\}$ est une base de X^n en tant que P-module, les éléments de X_0^n (qui sont aussi des éléments de X^n) s'écrivent de manière unique sous la forme $\sum\limits_{finie} p_k^0 e_k^n$, où $p_k^0 \in P_0$, ce qui permet de définir un morphisme de P-modules $\left\{ \begin{array}{lccc} \varphi : & X_0^n & \rightarrow & P_0 \otimes_P X^n \\ & \sum\limits_{finie} p_k^0 e_k^n & \mapsto & \sum\limits_{finie} p_k^0 \otimes e_k^n \end{array} \right.$.
Cette application est en fait un isomorphisme entre X_0^n et $P_0 \otimes_P X^n$: l'application associant à un élément de la forme $\sum\limits_{finie} p_k^0 \otimes x_k^n$ l'élément $\sum\limits_{finie} p_k^0 x_k^n$ de X_0^n en est l'inverse.

Via cet isomorphisme entre X_0^n et $P_0 \otimes_P X^n$, on peut vérifier que $X_0^n \cap Z^n$ a pour image $\mathrm{Ker}(id \otimes r_n)$ et que Z_0^n a pour image $\mathrm{Im}(id \otimes r_{n+1})$, ce qui montre qu'on a bien[31] :

$$\mathrm{Ker}(id \otimes r_n)/\mathrm{Im}(id \otimes r_{n+1}) \simeq (X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n.$$

Cette différence entre la définition de Hopf et la définition moderne de l'homologie des groupes pose question. Nous devons d'une part déterminer si les deux définitions se rejoignent, et de quelle manière, et d'autre part commenter l'esprit dans lequel celle de Hopf est élaborée. Il sera plus facile de se livrer à cette analyse après avoir étudié l'application topologique que fait Hopf de sa contruction algébrique.

7.2.2 Application topologique

Le second paragraphe de Hopf est intitulé "Die Rolle der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ in der Homologietheorie". On voit donc apparaître peu à peu la structure de son travail : tout d'abord une partie algébrique et abstraite, avec la démonstration de l'invariance d'objets très généraux[32], les $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$, en

[31] Ici bien sûr, on a tensorisé par P_0 et non par $\mathbb{Z}$ comme c'était le cas plus haut.

[32] On remarquera notamment qu'aucune hypothèse n'est faite sur l'anneau P si ce n'est qu'il est unitaire, ni sur le P-module J.

la résolution libre de J par des P-modules. Ce résultat très général est ensuite particularisé : si J est un anneau unitaire quelconque, seul le cas où P est égal à l'anneau $J[\mathfrak{G}]$ d'un certain groupe $\mathfrak{G}$, et où l'on munit J d'une structure de P-module en utilisant l'action triviale de $\mathfrak{G}$, est pris en compte ; et le sous-P-module P_0 est tout le temps pris comme étant $\mathrm{Ker}(S)$. Ce sont les seuls résultats obtenus pour cette étude particulière qui vont être utilisés dans le cadre de la topologie et la situation générale de départ ne propose en fin de compte aucune application dans la suite de l'article.

Dans le premier point de ce paragraphe, intitulé "Complexes à automorphismes"[33], Hopf se donne donc un complexe[34] K et J désigne un anneau unitaire pris comme anneau de coefficients pour les chaînes de K. Les groupes des n-chaînes de K sont notés X^n (avec bien sûr $n \in \mathbb{N}$). Hopf pose également $X^{-1} = J$. Si $n \geq 1$ et x est une n-chaîne, hopf note $r(x)$ son bord. Lorsque x est dans X^0 par contre, donc lorsque x est de la forme $\sum t_i x_i^0$ où les t_i sont des éléments de J et les x_i^0 des sommets de K, $r(x)$ ne désigne alors pas le bord de x mais l'élément $\sum t_i$ de J.

L'application de bord r (pour $n \geq 1$) est un morphisme de X^n dans X^{n-1} ; Hopf note Z^n son noyau et H^{n-1} son image. Bien entendu, pour $n \geq 0$, Z^n est le groupe des n-cycles et H^{n-1} est le groupe des $(n-1)$-bords de K. Z^0 est le groupe des 0-cycles capables de bord ("berandungsfähig"). De plus $H^{-1} = X^{-1} = J$ et Hopf pose $Z^{-1} = J$.

Comme J est supposé unitaire, chaque cellule (de dimension supérieure à 1) orientée c est une chaîne, au sens où l'on peut lui faire correspondre la chaîne $1c$. De même les sommets (qui, eux, ne sont pas orientés) sont également des chaînes. Ainsi, pour $n \geq 1$, l'ensemble des n-cellules orientées x_i^n forme une base de X^n (en tant que J-module libre donc) et, de même, l'ensemble des sommets x_i^0 du complexe forme une base de X^0.

Si l'on dresse un premier bilan des considérations topologiques de Hopf, on voit évidemment se dessiner un lien avec les investigations algébriques dont nous avons discuté plus haut. La description d'un complexe par Hopf fait apparaître les objets qui intervenaient précédemment dans les (J,P)-suites, et la concordance des notations vise d'ailleurs à rendre claire la proximité entre son étude topologique et son étude algébrique. Mais, pour l'instant, on ne peut dire que Hopf associe une (J,P)-suite à un complexe cellulaire quelconque : certes on voit apparaître les modules libres X^{n+1} et les morphismes passant de X^{n+1} à X^n mais ces morphismes ne vérifient pas né-

[33]"Komplexe mit Automorphismen".

[34]Ce complexe peut être, selon Hopf, aussi bien simplicial que cellulaire mais en fin de compte Hopf parle continuellement de "cellules" donc nous adopterons nous aussi le point de vue cellulaire.

cessairement les conditions d'une (J, P)-suite vu que leur image, si elle est bien contenue dans Z^n, ne lui est pas forcément égale. Ce défaut dans l'égalité $\mathrm{Im}(r_{n+1}) = \mathrm{Ker}(r_n)$ est d'ailleurs précisément l'homologie du complexe en dimension n et on comprend donc dès le départ que Hopf ne peut pas construire directement à partir d'un complexe quelconque une (J, P)-suite.

Hopf introduit ensuite la notion d'automorphisme d'un complexe K. Il s'agit d'une permutation sur les cellules (non orientées) qui préserve les faces (et donc, si K est un complexe simplicial, un automorphisme de K est une application simpliciale bijective de K). Un automorphisme A de K associe donc à toute cellule orientée x_i^n une cellule orientée Ax_i^n et induit, lorsqu'on le prolonge par J-linéarité, un automorphisme entre chacun des groupes de chaînes X^n, via $A(\sum t_i x_i^n) = \sum t_i A x_i^n$ (et A peut être aussi défini sur $X^{-1} = J$ par $At = t$). De plus A commute avec l'application bord, donc induit un endomorphisme des Z^n et des H^n.

Si l'on se donne un groupe $\mathfrak{G}$ d'automorphismes A_j de K, on peut considérer l'anneau du groupe $P = J[\mathfrak{G}]$ et munir les X^n d'une structure de P-module via $\alpha x = \sum t_j A_j x$ si $\alpha = \sum t_j A_j \in P$. L'application bord est un morphisme de P-modules et par conséquent les Z^n et les H^n sont également des P-modules. Les cellules (non orientées) de K décrivent des orbites sous l'action de $\mathfrak{G}$; Hopf choisit une cellule $|x_k^n|$ comme représentant de chaque orbite et lui affecte une orientation $\bar{x}_k^n$. On note E^n un système de représentants $\bar{x}_k^n$ des n-cellules de K. Comme toute n-chaîne se laisse écrire sous la forme $x = \sum t_{jk} A_j \bar{x}_k^n$, c'est-à-dire sous la forme $x = \sum \alpha_k \bar{x}_k^n$, où $\alpha_k \in P$, ceci revient à dire que E^n engendre X^n en tant que P-module.

Si l'on suppose que le groupe $\mathfrak{G}$ agit librement[35] sur K, alors les E^n sont des bases des X^n pour la structure de P-module. Les X^n sont donc alors tous des P-modules libres.

Commentons à nouveau avant d'aller plus loin. Les X^n sont des J-modules libres mais si on les considère comme des P-modules, ils ne sont plus forcément libres car deux éléments $x = \sum t_{jk} A_j \bar{x}_k^n$ peuvent coïncider sans que les coefficients de P affectés aux $\bar{x}_k^n$ soient les mêmes. Il faut ajouter comme condition le fait que $\mathfrak{G}$ agit librement sur K pour que le système E^n constitue bien une base du P-module X^n, ceci quel que soit le choix de E^n.

On notera à nouveau le style caractéristique de Hopf. Le rapport avec la topologie est apparu par la considération d'un complexe et de ses cellules, mais on les voit pourvus d'une structure sans qu'il soit indiqué ce à quoi

[35] Ceci signifie que tous les éléments de $\mathfrak{G}$ qui sont différents de l'identité sont sans point fixe ("fixpunktfrei").

cela peut mener, et Hopf introduit un groupe $\mathfrak{G}$ d'automorphismes qui n'a, à ce stade, aucune signification topologique particulière. Le fait, pour les X^n, d'échanger une structure de J-module libre pour une structure de $J[\mathfrak{G}]$-module libre, n'est alors pas justifié.

Le second point de ce paragraphe topologique est intitulé "Revêtements réguliers"[36]. Etant donné un groupe $\mathfrak{G}$ d'automorphismes agissant librement sur K, on peut construire un complexe $\mathfrak{K}$ dont K est un revêtement, en définissant une cellule de $\mathfrak{K}$ pour toute orbite sous $\mathfrak{G}$ d'une cellule de K. Le complexe K est alors ce que Hopf appelle un revêtement "régulier"[37] de $\mathfrak{K}$. On peut bien sûr partir de l'espace base $\mathfrak{K}$ et en construire un revêtement régulier K associé à un sous-groupe distingué du groupe fondamental de $\mathfrak{K}$.[38]

Soit U l'application associant à toute cellule $|x_k^n|$ de K la cellule de $\mathfrak{K}$ lui correspondant par construction (et qui correspond donc à toutes les cellules situées dans la même orbite que $|x_k^n|$) ; l'application U est la projection du revêtement K sur $\mathfrak{K}$. Cette application induit un morphisme de X^n sur le groupe $\mathfrak{X}^n$ des n-chaînes de $\mathfrak{K}$. Cette application U possède la propriété d'envoyer toute base de K en tant que P-module sur une base de $\mathfrak{K}$ en tant que J-module. Explicitement, voici quel est l'effet de cette projection U : si $x = \sum \alpha_k \bar{x}_k^n$ est une chaîne quelconque de X^n et $\alpha_k = \sum t_{kj} A_j \in J[\mathfrak{G}]$, alors $Ux = \sum_k S(\alpha_k)\mathfrak{x}_k^n$, où $\mathfrak{x}_k^n$ désigne la cellule $U\bar{x}_k^n$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(U)$ est égal à X_0^n (P_0 étant ici pris égal à $\mathrm{Ker}(S)$).

Si l'on note $\mathfrak{r}$ l'application bord sur le complexe $\mathfrak{K}$, on voit sans mal que U vérifie : $Ur = \mathfrak{r}U$ (et ceci même en degré 0 si l'on définit $\mathfrak{r}$ sur $\mathfrak{X}^0$ par $\mathfrak{r}(\sum t_i x_i^0) = \sum t_i$ et si l'on pose $Ut = t$ pour tout t de J).

Les questions qui se posent naturellement consistent à déterminer comment sont reliés les cycles et les bords des complexes K et $\mathfrak{K}$ via la projection U. Notons $\mathfrak{Z}^n$ le groupe des n-cycles de $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{H}^n$ son groupe des n-bords. Les inclusions $U(Z^n) \subset \mathfrak{Z}^n$ et $U(H^n) \subset \mathfrak{H}^n$ sont claires mais y a-t-il égalité ? Les objections éventuelles à l'égalité viennent de ce que lorsqu'on relève un cycle de $\mathfrak{K}$, on ne trouve pas nécessairement un cycle de K.[39] Par conséquent, on n'a que l'inclusion $U(Z^n) \subset \mathfrak{Z}^n$. Par contre on a l'égalité $U(H^n) = \mathfrak{H}^n$ car

[36]"Reguläre Überlagerungen."

[37]L'adjectif "régulier" traduit le fait que l'action de $\mathfrak{G}$ sur K est libre.

[38]Nous avons expliqué comment faire cela dans la section sur les revêtements.

[39]C'est un phénomène qui se voit clairement en dimension 1 par exemple ; si l'on prend un cycle obtenu par somme des 1-cellules orientées AB, BC, CA (où A, B et C désignent des sommets de $\mathfrak{K}$) le relevé n'est pas forcément un 1-cycle de K car, lorsqu'on a parcouru le même chemin dans le relevé, il se peut qu'il finisse en un point au-dessus de A qui ne coïncide pas avec le point initial.

$U(H^n) = Ur(X^{n+1}) = \mathfrak{r}U(X^{n+1}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{X}^{n+1}) = \mathfrak{H}^n$.

Les inclusions précédentes montrent que U induit un morphisme entre les groupes d'homologie de K et ceux de $\mathfrak{K}$ mais qu'il ne s'agit pas d'un isomorphisme. Le lien entre l'homologie dans K et l'homologie dans $\mathfrak{K}$ est en fait plus subtil. Hopf parvient à le révéler en établissant l'isomorphisme :

$$\mathfrak{Z}^n/U(Z^n) \simeq (X_0^{n-1} \cap H^{n-1})/H_0^{n-1},\ n \geq 1.$$

Hopf prouve l'existence de cet isomorphisme en construisant un morphisme surjectif $g : (X_0^{n-1} \cap H^{n-1}) \to \mathfrak{Z}^n/U(Z^n)$ dont il montre que le noyau est H_0^{n-1}. L'idée de la définition de g est la suivante : si une $(n-1)$-chaîne x est un élément de $X_0^{n-1} \cap H^{n-1}$ alors d'une part, comme c'est un élément de X_0^{n-1}, on a $Ux = 0$, et d'autre part, elle est le bord d'une n-chaîne y de K. Le bord commutant avec U, on constate que Uy est un n-cycle, soit un élément de $\mathfrak{Z}^n$. L'application g consiste donc à associer Uy à x. Mais y n'est défini qu'à un cycle près, ce qui explique que l'on passe au quotient par $U(Z^n)$ à l'image. Le fait que g est surjectif vient directement de ce que U l'est.

Les groupes d'homologie de K et de $\mathfrak{K}$ sont bien évidemment définis comme étant $B^n = Z^n/H^n$ et $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{Z}^n/\mathfrak{H}^n$. Comme $U(H^n) = \mathfrak{H}^n$, on a $U(B^n) = U(Z^n)/\mathfrak{H}^n$. Un théorème classique d'isomorphisme permet d'en déduire :

$$\mathfrak{B}^n/U(B^n) \simeq \mathfrak{Z}^n/U(Z^n),\ n \geq 1,$$

d'où :

$$\mathfrak{B}^n/U(B^n) \simeq (X_0^{n-1} \cap H^{n-1})/H_0^{n-1},\ n \geq 1.$$

Le membre de droite de l'isomorphisme précédent rappelle bien sûr fortement les invariants mis en évidence par Hopf dans l'étude algébrique du premier paragraphe. Pour les retrouver exactement, il faut avoir les égalités $H^n = Z^n$, ce qui amène à restreindre l'étude à celle des revêtements acycliques, comme Hopf le fait dans le point suivant.

Un complexe est dit acyclique en dimension $n \geq 1$ si tous les n-cycles sont des n-bords, ce qui se traduit précisément par : $H^n = Z^n$. Un complexe est dit acyclique en dimension 0 s'il est connexe[40]. Hopf se concentre sur des

[40]Il ne faut pas s'étonner de la différence apparente de définition entre le cas $n \geq 1$ et le cas 0. Un complexe K ne peut avoir son groupe d'homologie en dimension 0 qui s'annule car il est isomorphe au J-module libre de base l'ensemble des composantes connexes par arcs de K. Ce que recherche Hopf c'est la possibilité de construire une (J, P)-suite (éventuellement finie) associée à un complexe cellulaire donné. Pour avoir l'exactitude sur les premiers termes, il est obligé de rajouter la dimension -1 via $H^{-1} = J = Z^{-1}$, avec $r_0(x) = \sum t_i$ si $x = \sum t_i x_i^0$, et la condition de connexité assure que : $\mathrm{Im}(r_1) = \mathrm{Ker}(r_0)$.

complexes K acycliques en dimension 0 à $N-1$. Dans ce cas, la suite

$$\{J = Z^{-1};\ X^0 \supset Z^0;\ X^1 \supset Z^1; ...;\ X^{N-1} \supset Z^{N-1};\ X^N \supset Z^N\},$$

est bien une (J, P)-suite. Et alors les groupes $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$ associés au complexe K sont, pour $n = 0, ..., N$, isomorphes aux invariants $\mathfrak{G}_J^{n+1}$ associés au groupe $\mathfrak{G}$ et à l'anneau J. La condition d'acyclicité permet donc de relier l'information topologique avec une information purement algébrique. On peut préciser cette information : la condition $H^n = Z^n$, pour $n = 0, ..., N-1$, implique les égalités $(X_0^{n-1} \cap Z^{n-1})/Z_0^{n-1} = (X_0^{n-1} \cap H^{n-1})/H_0^{n-1}$ et $B^n = 0$, d'où :

$$\mathfrak{B}^n \simeq \mathfrak{G}_J^n,\ n = 1...N-1,$$

$$\mathfrak{B}^N/U(B^N) \simeq \mathfrak{G}_J^N.$$

Afin de bien fixer les idées, nous reprenons la synthèse effectuée par Hopf via les propositions II et III (p. 56) :

II. Soit J un anneau unitaire, K un complexe (fini ou infini), pris à coefficients dans J et acyclique en dimension $0, 1, ..., N-1$. Soit de plus $\mathfrak{G}$ un groupe d'automorphismes agissant librement sur K et $\mathfrak{K}$ le complexe recouvert par K et engendré[41] par $\mathfrak{G}$. Alors les groupes d'homologie $\mathfrak{B}_J^n$ de $\mathfrak{K}$, à coefficients dans J, sont, pour $n = 1, 2, ..., N-1$, isomorphes aux groupes $\mathfrak{G}_J^n$; leur structure est donc entièrement déterminée par celles de $\mathfrak{G}$ et de J et est indépendante de K et des automorphismes représentant $\mathfrak{G}$.

III. Sous les mêmes conditions que précédemment, U désignant la projection de K sur $\mathfrak{K}$ et B_J^n les groupes d'homologie de K en dimension n, on a :

$$\mathfrak{B}_J^N/U(B_J^N) \simeq \mathfrak{G}_J^N;$$

la structure du groupe $\mathfrak{B}_J^N/U(B_J^N)$ est donc également entièrement déterminée par celles de $\mathfrak{G}$ et J.

Bien entendu, les propositions précédentes s'appliquent lorsque l'on prend un complexe connexe $\mathfrak{K}$ et son revêtement universel K muni de l'action du groupe fondamental $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{K}$. L'intérêt du revêtement universel est qu'il est non seulement connexe mais simplement connexe (son groupe fondamental est trivial). Sans donc avoir besoin de faire d'hypothèses supplémentaires d'acyclicité, le revêtement universel est acyclique en dimension 0 et en dimension 1 (vu que le premier groupe d'homologie est l'abélianisé du groupe

[41] Par cette expression Hopf fait référence au complexe dont on a dit plus haut qu'on l'obtient en identifiant toutes les cellules de K appartenant à une même orbite sous $\mathfrak{G}$.

fondamental). On obtient donc comme application directe des propositions II et III les isomorphismes :

$$\mathfrak{B}^1 \simeq \mathfrak{G}^1_J,\ \mathfrak{B}^2_J/U(B^2_J) \simeq \mathfrak{G}^2_J,$$

qui sont vrais sous la seule hypothèse que $\mathfrak{K}$ est connexe, U désignant la projection du revêtement universel sur $\mathfrak{K}$.

L'isomorphisme $\mathfrak{B}^1 \simeq \mathfrak{G}^1_J$ est déjà bien connu. Celui correspondant à la dimension 2 indique que le deuxième groupe d'homologie de $\mathfrak{K}$ est déterminé par le groupe fondamental. Cette information fait forcément penser au résultat principal de l'article [121] de 1942 de Hopf. Après avoir étudié – et parfois déterminé explicitement – les groupes $\mathfrak{G}^n_J$ dans certains cas particuliers (groupes libres avec une base finie ou dénombrable, groupes finis), Hopf revient naturellement à cet isomorphisme. Il montre l'isomorphisme $\mathfrak{G}^2 \simeq (\mathfrak{C}_\mathfrak{F} \cap \mathfrak{R})/\mathfrak{C}_\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ si $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ où est un groupe libre et $\mathfrak{R}$ un sous-groupe distingué de $\mathfrak{F}$; pour ce faire il considère un complexe d'arêtes de groupe fondamental $\mathfrak{F}$ et utilise le revêtement de ce complexe associé au sous-groupe normal $\mathfrak{R}$. On notera que l'on a finalement $\mathfrak{B}^2_J/U(B^2_J) \simeq (\mathfrak{C}_\mathfrak{F} \cap \mathfrak{R})/\mathfrak{C}_\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$, ce qui n'est pas textuellement ce qu'avait établi Hopf dans [121], mais y ressemble assurément[42].

7.3 Les raisons d'une définition

Associer des groupes d'homologie à un groupe est quelque chose qui n'avait jamais été fait jusque là et qui apparaît au travers de considérations d'ordre topologique. On peut donc naturellement s'interroger sur la part de l'intuition topologique et la part de l'abstraction dans le processus de conception de l'homologie des groupes. On peut notamment mettre en perspective ces deux aspects en comparant la définition de Hopf avec les définitions modernes, ce qui permet de saisir à quel point l'abstraction opérée par Hopf a été poussée. Et on peut aussi, chose plutôt rare, comparer la définition de Hopf avec d'autres définitions de l'homologie des groupes élaborées indépendamment car, comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, l'article de Hopf de 1942 a inspiré d'autres contributions à la naissance de l'homologie des groupes.

Il apparaîtra clairement au lecteur connaissant les présentations qui sont faites de l'homologie des groupes dans les traités dédiés au sujet qu'il y a de notables ressemblances entre ce qui y est proposé et la version de Hopf[43]. Le

[42] De même que Hopf, nous y reviendrons plus tard car il s'agit bien entendu de plus qu'une ressemblance.

[43] Nous avons en partie rendu manifestes ces ressemblances en 7.2.1

procédé des (J,P)-suites de Hopf a par la suite trouvé une telle importance en topologie algébrique qu'une terminologie propre lui a été décernée ("résolution libre") et elle est comprise dans le concept plus large de "suite exacte" devenu depuis d'usage très courant en algèbre.

On peut par exemple retrouver dans le classique traité [32] de K.S. Brown l'idée de considérer une résolution libre (ou, ce qui est fait plus généralement, une résolution projective) de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$-modules. Mais à la différence de Hopf cette résolution est tensorisée par $\mathbb{Z}$ pour définir l'homologie de $\mathfrak{G}$ à coefficients entiers. La même idée guide également la définition proposée par Weibel dans [236], sauf qu'elle est présentée au sein du cadre plus général des foncteurs (pour l'homologie des groupes c'est le foncteur Tor qui intervient, adjoint à gauche du produit tensoriel).

L'utilisation du revêtement universel d'un complexe acyclique de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ est également une méthode devenue classique[44] pour définir l'homologie des groupes. On ne peut réellement dire que cette définition se trouve déjà chez Hopf car il ne paraît pas avoir réfléchi à l'existence de complexes permettant le calcul de l'homologie de n'importe quel groupe et n'a pas introduit les revêtements universels dans le but de définir l'homologie des groupes[45]. Mais l'idée y est clairement présente.

Les objets X_0^n, Z_0^n, etc. intervenant dans la construction algébrique de Hopf ressortent comme les plus étrangers à une vision moderne des choses. L'objet X_0^n est en fait une image isomorphe du produit $P_0 \otimes X^n$ dans X^n mais Hopf n'a probablement pas senti la nécessité d'utiliser le produit tensoriel[46]. Celle-ci s'est largement répandue par la suite car le produit tensoriel se révèle commode du fait notamment de la propriété d'exactitude à droite.

On ne peut de toute façon pas réellement expliquer pourquoi Hopf aboutit à cette définition à la lumière des définitions actuelles ; seul l'inverse apparaît

[44] C'est une autre des méthodes proposées par [32] par exemple.

[45] L'homologie des groupes est une conséquence et non le but de l'article de Hopf.

[46] La première définition du produit tensoriel de deux groupes abéliens n'apparaît qu'en 1938 entre les mains de Whitney dans [243]. Elle y est déjà étendue à une classe d'objets plus grande, les groupes à opérateurs, qui couvre les modules. L'usage du produit tensoriel ne s'est imposé que progressivement, au long des années 1940 – notamment du fait des travaux d'Eilenberg et Mac Lane qui l'ont mis à l'honneur à la fois dans leurs articles en lien avec l'homologie et la cohomologie et dans leur célèbre article [68] sur la notion de naturalité – et en premier lieu aux Etats-Unis. Hopf n'avait peut-être pas encore l'habitude de l'utiliser et il n'en avait de toute façon pas besoin. Et quitte à utiliser une opération sur les structures pour définir X_0^n, la notion de "produit" (direct), que l'on trouve par exemple dans le *Moderne Algebra* de van der Waerden pour les systèmes hypercomplexes, les idéaux, les modules, etc., aurait été tout-à-fait suffisante pour ce que Hopf veut faire. Les chaînes se projetant sur 0 sont les chaînes à coefficients dans P_0 : on peut décrire leur ensemble comme le produit du P-module P_0 par le P-module X_n.

raisonnable.

Nous pouvons néanmoins chercher à comprendre la raison de la définition adoptée par Hopf, à la lumière notamment de l'influence du travail de Reidemeister sur sa manière d'appréhender l'utilisation du revêtement universel. Il est manifeste que l'article [191] de Reidemeister a constitué une source d'inspiration pour Hopf : il le reconnaît lui-même. Celle-ci se traduit concrètement par l'utilisation des revêtements, et précisément par la possibilité de munir les groupes de chaînes du revêtement universel d'une structure de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$-module. Mais le fil conducteur formé des résultats de Hurewicz et cette influence de Reidemeister ne suffisent malheureusement pas à clarifier le détail de la démarche de Hopf, qui ne rend à vrai dire pas la tâche évidente. Comme il présente en premier les résultats algébriques et nous fait part régulièrement de raisonnements sur des situations les plus générales possibles, il nous prive pour une bonne part de l'accès à sa démarche en tant que chercheur, quand bien même il s'agirait d'une démarche qui aurait été rationalisée a posteriori ou dont il aurait évincé les errements. La comparaison avec l'article [87] de Freudenthal est on ne peut plus révélatrice de cet effet, et on ne peut plus pertinente du fait de la proximité entre les objets et les raisonnements impliqués. Ce papier de Freudenthal, sur lequel nous nous étendrons plus loin, présente les raisonnements avec un enchaînement tellement logique, avec une telle simplicité, et qui plus est en expliquant pourquoi considérer tel ou tel objet, que l'article de Hopf apparaît en comparaison obscur et nous mène d'autant à nous interroger sur le sens dissimulé derrière certaines considérations de Hopf.

Si l'on se remémore la construction du revêtement universel, il apparaît clairement qu'on a de bonnes chances de récupérer des informations sur la structure du complexe base en trivialisant l'action de $\mathfrak{G}$ dans le revêtement universel. Le fait de tensoriser par $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ permettant justement de trivialiser l'action de $\mathfrak{G}$, ceci explique que l'on en passe par là dans des définitions modernes de l'homologie des groupes.

Hopf avait lui aussi à proposer une façon de récupérer l'information sur le complexe base à partir du revêtement universel mais sa solution n'est pas celle qui a été retenue ensuite. Hopf se concentre plutôt sur les chaînes du revêtement universel qui sont dans le noyau de la projection sur la base. Une façon d'obtenir toutes ces chaînes en dimension n est de prendre toutes les n-chaînes dont les coefficients sont dans l'idéal engendré par les $g - e$, $g \in \mathfrak{G}$ et e désignant le neutre de $\mathfrak{G}$. Comme $\mathrm{Ker}(S)$ est exactement l'idéal engendré par les $g-e$, c'est bien ce que fait Hopf en considérant X_0^n avec $P_0 = \mathrm{Ker}(S)$.

Pourquoi s'intéresser précisément aux chaînes du revêtement se projetant sur la chaîne nulle ? C'est peut-être là que se trouve une autre expression de l'influence de Reidemeister. Pour aboutir à sa définition de "groupe d'homotopie" dans [191], Reidemeister considérait la notion de chaîne congrue à 0 modulo un sous-groupe $\mathfrak{g}$ du groupe fondamental ainsi que celle de chaîne dont le bord est congrue à 0 modulo $\mathfrak{g}$. Concrètement une n-chaîne congrue à 0 modulo $\mathfrak{G}$ est exactement un élément du module X_0^n défini par Hopf. Or la définition par Reidemeister du k-ième groupe d'homotopie, à savoir $\mathfrak{H}^k = \mathfrak{K}^k_{\mathfrak{G}}/\mathfrak{K}^k_0$, fait intervenir $\mathfrak{K}^k_{\mathfrak{G}}$ qui est justement le groupe des k-chaînes du revêtement universel dont le bord est congru à 0 modulo $\mathfrak{G}$. Reidemeister indique en outre à la fin de son article que si l'on regarde les éléments de $\mathfrak{H}^k$ modulo $\mathfrak{G}$, ce qui revient à en regarder l'image par la projection U sur la base, on obtient le k-ième groupe d'homologie de la base.

Ce que fait Hopf peut être lu dans le prolongement des considérations de Reidemeister. Juste avant d'établir l'isomorphisme $\mathfrak{Z}^n/U(Z^n) \simeq (X_0^{n-1} \cap H^{n-1})/H_0^{n-1}$, Hopf montre que le bord commute avec la projection (i.e. $Ur = \mathfrak{r}U$). Il apparaît donc normal de chercher à relier la projection d'un élément avec le bord de celui-ci et c'est exactement ce que fait Hopf pour prouver l'isomorphisme précédent. Un élément x de $X_0^{n-1} \cap H^{n-1}$ est exactement le bord d'un élément y du groupe $\mathfrak{K}^k_{\mathfrak{G}}$ défini par Reidemeister. Et Hopf considère précisément la projection Uy, probablement sachant – comme c'est indiqué par Reidemeister – que ce faisant il devrait pouvoir aboutir à une information sur l'homologie du complexe base $\mathfrak{K}$. Il se trouve en effet que Uy est un cycle de $\mathfrak{K}$.

Ce n'est qu'une hypothèse mais il s'avère donc plausible de considérer que le travail de Reidemeister a pu conduire Hopf à relier l'homologie d'un complexe avec celle de son revêtement universel en se concentrant sur les chaînes se projetant sur 0. Ce procédé, qui permet notamment dans le cadre des complexes acycliques de retrouver l'homologie du groupe fondamental $\mathfrak{G}$, a obligé Hopf à effectuer un décalage d'indice (en exposant) dans sa définition $\Gamma^n(J, J[\mathfrak{G}], \mathrm{Ker}(S))$ pour faire coïncider l'homologie du complexe base en dimension n avec l'homologie du groupe en dimension n. S'il ne s'était pas concentré sur l'homologie associée au noyau de la projection et avait traité directement le lien entre l'homologie du revêtement et celle de la base, il n'aurait pas eu besoin de ce décalage d'indice. Ce décalage peut s'expliquer a posteriori à l'aide de la "suite longue d'homologie"[47].

Brièvement, si l'on dispose d'une suite exacte de complexes de chaînes

$$0 \to K \to L \to M \to 0,$$

celle-ci induit une suite exacte longue lorsque l'on passe aux groupes d'ho-

[47]Cf. par exemple [154] pp. 44-45.

mologie :

$$\dots \to H_{n+1}(M) \to H_n(K) \to H_n(L) \to H_n(M) \to H_{n-1}(K) \to \dots$$

Dans la situation considérée par Hopf, on a bien une suite exacte reliant les complexes $X_0 = (X_0^n)$, $X = (X^n)$ et $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}^n)$, à savoir :

$$0 \to X_0 \hookrightarrow X \xrightarrow{U} \mathfrak{X} \to 0.$$

Maintenant si l'on passe à la suite longue d'homologie, en tenant compte de ce que, sous condition d'acyclicité de X en dimension n, $0 < n < N$, $H_n(X) := B^n = 0$, on obtiendra $H_{n+1}(\mathfrak{X}) \simeq H_n(X_0)$, $0 < n < N-1$, c'est-à-dire que l'homologie en dimension n du noyau de la projection est la même que l'homologie en dimension $n+1$ de la base.

7.4 Retour sur les motivations de Hopf

Nous avons porté à la connaissance du lecteur et étudié les considérations et résultats principaux de Hopf dans cet article [123]. Ce faisant, nous cherchons notamment à élucider autant que faire se peut la démarche suivie par Hopf et au sein de celle-ci les places de l'algèbre et de la topologie. Pour continuer dans cette voie, poussons l'étude jusqu'à la fin de l'article de Hopf.

Dans le quatrième paragraphe, Hopf étudie les applications géométriques de son étude. Bien entendu, il ne s'agit pas réellement d'applications à la géométrie des groupes d'homologie mais plutôt de l'utilisation de la géométrie pour des résultats sur les $\mathfrak{G}_J^n$; en général ses résultats sont formulés de la manière : "si $\mathfrak{G}$ est le groupe fondamental d'un complexe vérifiant telles conditions alors les $\mathfrak{G}_J^n$ vérifient telles propriétés". De ce point de vue, cet article de Hopf est en plein dans la lignée de son précédent, où le groupe $\mathfrak{G}_1^*$ était utilisé en mettant à profit des connaissances topologiques afin d'établir des résultats algébriques. Pourtant, comme Hopf a lié l'homologie des complexes avec les groupes $\mathfrak{G}_J^n$ obtenus de manière purement abstraite, on aurait pu s'attendre à voir des résultats et des constructions algébriques mis en œuvre pour déterminer les groupes d'homologie de certains complexes, voire pour obtenir des méthodes algébriques spécifiques de détermination de l'homologie des complexes. Mais il n'en est finalement rien, et l'article de Hopf se conclut par un cinquième paragraphe, intitulé "Beziehungen zur Homotopietheorie", discutant les rapports entre son travail et la théorie de l'homotopie, ce qui achève la boucle en fin de compte : car encore une fois les motivations de Hopf pour ses recherches sur l'homologie des groupes proviennent avant tout de réflexions en lien avec les résultats de Hurewicz sur l'homotopie.

Le lecteur aura remarqué que dans l'analyse que nous avons faite de l'étude de Hopf n'apparaît à aucun moment de commentaire sur cette proposition de Hurewicz donnée en tout début d'article. C'est dans le dernier paragraphe qu'il y revient, achevant logiquement l'exploration offerte par ce fil conducteur, en utilisant d'autres résultats de Hurewicz. Il a besoin d'une part du fait que si $n > 1$ et si un complexe $\mathfrak{K}$ est asphérique en dimension n alors il en va de même de tout revêtement de $\mathfrak{K}$,[48] d'autre part de ce que si un complexe est asphérique en les dimensions $1, ..., N-1$, il est aussi acyclique en ces dimensions[49]. Avec ces deux résultats, voici comment l'on retrouve la proposition de Hurewicz dans le travail de Hopf : si l'on considère un complexe $\mathfrak{K}$ asphérique en dimensions $2, ..., N-1$ alors, d'après ce qui précède, tout revêtement de $\mathfrak{K}$ (et en particulier son revêtement universel K) est également asphérique en les mêmes dimensions, donc acyclique en dimensions $2, ..., N-1$. Mais tout revêtement universel K est acyclique en dimensions 0 et 1 (car connexe et de groupe fondamental trivial) donc, finalement, si un complexe $\mathfrak{K}$ est asphérique en dimensions $2, ..., N-1$, la proposition II de Hopf appliquée à $\mathfrak{K}$ et à son revêtement universel K muni de l'action du groupe fondamental $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{K}$ montre que les groupes d'homologie $\mathfrak{B}^n_J$ de $\mathfrak{K}$ sont, pour $n = 1, ..., N-1$, isomorphes aux $\mathfrak{G}^n_J$. La proposition de Hurewicz se retrouve bien au sein de ce résultat mais Hopf a su en donner en plus une explication algébrique. L'invariance des $\mathfrak{G}^n_J$, et conséquemment la seule dépendance – pour un espace asphérique – des $\mathfrak{B}^n_J$ en $\mathfrak{G}$ est expliquée à l'aide des (J, P)-suites. Et cette utilisation des (J, P)-suites se trouve pouvoir être concrétisée géométriquement via l'utilisation du revêtement universel, et plus précisément du complexe de chaînes associé.

Hopf nous montre donc au final comment son travail répond au moins en partie à ses attentes, en précisant comment se fait la dépendance des $\mathfrak{B}^n_J$ en $\mathfrak{G}$. Mais ses résultats soulèvent évidemment d'autres questions. Il en est une en particulier, sur laquelle Hopf se penche en lien avec l'homotopie : la proposition III donne, sous l'hypothèse que K est acyclique en dimensions 0 à $N-1$, l'isomorphisme $\mathfrak{B}^N_J/U(B^N_J) \simeq \mathfrak{G}^N_J$. En particulier, comme nous l'avons déjà expliqué plus haut, on obtient, sans condition sur les complexes[50], l'isomorphisme $\mathfrak{B}^2_J/U(B^2_J) \simeq (\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{R})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$. Au vu de l'article de 1942 de Hopf, on doit nécessairement avoir $\mathfrak{S}^2 \simeq U(B^2)$. Ce constat amène donc à envisager un lien entre $U(B^N)$ et les images continues de N-sphères. En cherchant à comparer le groupe $\mathfrak{S}^n$ des classes d'homologie des images continues[51] de n-sphères dans $\bar{\mathfrak{K}}$ et son pendant Σ^n dans $\bar{K}$ (où K est un re-

[48] Ce résultat est un corollaire immédiat de la proposition 4 de [129] I. p. 114.

[49] Cf. la proposition 2 de [129] II. p. 522.

[50] Il suffit juste, mais c'est en fait toujours le cas ici, qu'ils soient pris connexes.

[51] Cf. [121] et le chapitre précédent où ce groupe était introduit dans le cas de la dimen-

vêtement quelconque de $\mathfrak{K}$), Hopf réalise facilement que $U(\Sigma^n)$ coïncide avec $\mathfrak{S}^n$ dès lors que $n \geq 2$ (la raison en étant que la n-sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe pour $n \geq 2$, ce qui permet de relever toute application continue de $\mathbb{S}^n$ dans $\bar{\mathfrak{K}}$ en une application continue de $\mathbb{S}^n$ dans $\bar{K}$). A nouveau, un résultat de Hurewicz, stipulant que si K est un complexe asphérique en les dimensions $1, ..., N-1$ alors tout N-cycle (à coefficients entiers) de K est homologue à une image continue d'une N-sphère, lui permet de conclure. En effet, prenant pour K le revêtement universel de $\mathfrak{K}$, il obtient $B^N = \Sigma^N$, d'où $\mathfrak{S}^N = U(B^N)$ et donc :

$$\mathfrak{B}^N/\mathfrak{S}^N \simeq \mathfrak{G}^N, \; N \geq 2,$$

ce qui redonne la formule $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \simeq (\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{R})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ de son article précédent. Hopf a également atteint sur ce point un des objectifs initiaux de ses recherches ayant abouti à la rédaction de l'article de 1945, à savoir retrouver cet isomorphisme remarquable qu'il avait établi en 1942 au sein d'un cadre plus général.

Mais l'article de Hopf se distingue également par les questions auxquelles il ne cherche pas à répondre ! L'analyse à venir des travaux d'Eilenberg et Mac Lane, Freudenthal et Eckmann, inspirés par l'article de 1942 de Hopf, nous permettra d'encore mieux saisir toute la richesse du lien révélé par Hopf entre le groupe fondamental et le deuxième groupe d'homologie, au travers des perspectives qu'il a offertes à d'autres chercheurs.

7.5 Conclusion

Nous avons pu observer une fois de plus la présentation de Hopf partir d'une étude algébrique et aussi générale que possible et proposer dans un deuxième temps les applications des enseignements ainsi obtenus à la topologie. Cette manière de faire a déjà été soulignée dans nos analyses précédentes de [118] et [121] et renvoie donc toujours en premier à la même volonté de présenter d'abord les résultats sous une forme générale, en les abstrayant du cadre topologique dont ils proviennent ou pour lequel ils s'appliquent en premier. Cette banière de généralité comprend également, dans cet article de Hopf, le fait de formuler l'invariance des $\Gamma^n(J, P, P_0)$ pour un anneau unitaire P, un idéal bilatère P_0 de P et un P-module J quelconques, alors qu'il n'est jamais fait usage par la suite de cette invariance dans un cadre aussi général.

Pour autant ce sont bien entendu les problèmes posés par la topologie qui ont motivé l'élaboration du raisonnement abstrait mené par Hopf. Contrairement à ce qu'on aurait pu attendre dans le prolongement de l'article de

---

sion 2.

1942, Hopf ne définit pas les groupes d'homologie associés à un groupe par la seule inspiration de ce que le deuxième groupe d'homologie d'un complexe asphérique en dimension 2 est déterminé par le groupe fondamental, ce qui donnait l'idée de la possibilité d'associer à un groupe quelconque G des groupes jouant l'équivalent des groupes d'homologie associés à un complexe de groupe fondamental G. La motivation la plus forte, celle qui fait le lien (via [122]) entre les articles de 1942 et 1945, qui est donnée en début d'introduction de l'article que nous venons d'utiliser, et sur laquelle Hopf revient en conclusion de son article, est la recherche d'une explication algébrique à l'invariance des groupes d'homologie d'un espace asphérique, l'espoir de mieux comprendre par l'élaboration d'un cadre algébrique adapté le rapport entre homologie et homotopie en topologie.

Comme nous avons pu le noter dans des contributions précédentes de Hopf, la compréhension algébrique et abstraite des phénomènes s'exprimant dans le cadre particulier de la topologie est une priorité pour lui. Alors que les références, explicites ou non, aux complexes asphériques sont constamment présentes dans l'article de Hopf, le titre en lui-même[52] n'annonce pas de proximité avec ces objets. Il présente une notion alors nouvelle, celle de groupe d'homologie associé à un groupe – et non comme c'était le cas exclusivement jusqu'alors, associé à un complexe ou un espace – tout en restant on ne peut plus évasif sur l'utilité et la raison d'une telle notion. L'attitude de Hopf est remarquable en ce que, bien qu'une compréhension approfondie des résultats de Hurewicz aient été le lien entre son article de 1942 et celui de 1945, le fait d'avoir progressé dans cette voie n'est pas mis en avant dans l'intitulé de l'article. Le titre ne reflète que le sentiment de toucher à quelque chose de nouveau sur le plan algébrique, ce qui laisse penser que c'est là ce que Hopf retient de plus important comme fruit de ses investigations. Pourtant Hopf n'a guère d'arguments pour justifier que ces groupes d'homologie $\mathfrak{G}^n_J$ sont pertinents pour l'étude du groupe $\mathfrak{G}$ lui-même et il ne peut donc se prononcer sur la fécondité (en tout cas algébrique) de sa découverte, bien qu'il la sente probable et invite le lecteur à la considérer[53].

Hopf révèle encore une fois dans son travail toute la dimension structuraliste de sa démarche. Il n'y avait rien à redire aux résultats de Hurewicz ni à la rigueur de leurs démonstrations mais celles-ci se contentaient de prouver qu'il existe un isomorphisme entre les n-ièmes groupes d'homologie de

[52] *Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören*, c'est-à-dire "Sur les groupes de Betti,..."

[53] Cf. en fin de l'introduction : "Ob andererseits die Theorie der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Abelschen Gruppen $\mathfrak{G}^n_J$ – sei es die algebraische oder die geometrische Seite dieser Theorie – brauchbar für die gruppentheoretische Untersuchung von $\mathfrak{G}$ is, weiß ich nicht ; immerhin möchte ich auf diese Möglichkeit hinweisen."

complexes r-asphériques pour $r = 2, ..., n-1$, et de groupes fondamentaux isomorphes : pour Hopf ceci n'explique pas pourquoi les n-ièmes groupes d'homologie de tels complexes ne dépendent que du groupe fondamental. La preuve topologique donne le pourquoi mais Hopf veut également comprendre le comment. Manifestement pour Hopf, comprendre le comment passe par l'introduction des structures pertinentes pour la description du problème et l'utilisation des seules propriétés de ces structures, abstraites des situations concrètes où elles se révèlent le plus souvent, afin de révéler des invariants (comme les groupes $(X_0^n \cap Z^n)/Z_0^n$). Cette compréhension est importante à ses yeux, quand bien même elle ne semble pas offrir au premier abord une aide d'un point de vue pratique.

Cet idéal de compréhension recherché par Hopf est également attribué à Noether : il a été synthétisé dans des propos célèbres de Noether rapportés par Weyl[54] :

"If one proves the equality of two numbers a and b by showing first that $a \leq b$ and $a \geq b$, it is unfair ; one should instead show that they are really equal by disclosing the inner ground for their equality."

Utilisant de manière cruciale le revêtement universel d'un complexe et s'inspirant d'idées déjà présentes chez Hurewicz et Reidemeister (et, en ce qui concerne ce dernier, tout particulièrement la vision des groupes de chaînes du revêtement comme des $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$-modules), Hopf a pu mettre sur pied une approche structurelle de la situation topologique qui l'intéressait au départ et toucher ainsi, en un sens, la raison profonde des choses en éclairant la dépendance algébrique entre des groupes d'homologie et un groupe donné (qui peut être vu comme le groupe fondamental d'un complexe) par les structures mises en jeu. Dans ce travail de Hopf, tout peut s'expliquer dès lors qu'a été conçu le cadre des (J, P)-suites. Mais pour cela il fallait être capable d'extraire des résultats topologiques de Hurewicz ce qui constituait l'essentiel en tant qu'informations algébriques. Ici il s'agissait du fait[55] qu'un espace Y est asphérique si et seulement si son revêtement universel Y^* est acyclique en toute dimension, ce qui permet d'associer à un espace asphérique une $(J, J[\mathfrak{G}])$-suite formée en chaque degré n des $J[\mathfrak{G}]$-modules des n-chaînes de Y^*. Hopf est même capable d'expliquer comment construire algébriquement une $(J, J[\mathfrak{G}])$-suite associée à un anneau unitaire J et un groupe $\mathfrak{G}$ quelconques, ce qui légitime totalement d'un point de vue théorique sa construction. Il n'a cependant pas creusé plus avant la possibilité de déterminer de façon purement algébrique les groupes d'homologie d'un

[54] Cf. [50] p. 70.
[55] Cf. [129] IV. p. 216.

groupe donné, se contentant d'une définition qui manque d'effectivité. Ce sont en fait Eilenberg et Mac Lane qui, parallèlement à l'écriture de l'article de 1945 de Hopf, et sur la seule base de son article de 1942, ont expliqué comment on pouvait définir les groupes d'homologie d'un groupe quelconque grâce à une construction algébrique plus efficace.

Chapitre 8

Sur l'homologie des groupes (suite) : vers la cohomologie des groupes

L'impact de l'article [121] de Hopf, analysant le lien entre groupe fondamental et deuxième groupe d'homologie, sur le développement de la topologie algébrique, et plus précisément sur la naissance de l'homologie et de la cohomologie des groupes, est remarquable. Malgré la guerre et les difficultés afférentes de diffusion des revues, il a inspiré au moins trois grandes contributions indépendantes : une [123] de Hopf lui-même, que nous avons analysée dans le chapitre précédent, une [87] de Hans Freudenthal depuis les Pays-Bas (publiée dans les *Annals of Mathematics*) et une (en deux temps, [69] puis [70]) d'Eilenberg et Mac Lane aux Etats-Unis. A ces trois travaux directement inspirés par l'article de Hopf de 1942 il convient d'ajouter celui de Beno Eckmann [59], qui bénéficie cependant également de l'apport de l'article de Hopf sur l'homologie des groupes.

L'occasion pour des grandes figures des mathématiques de travailler indépendamment dans une voie ouverte par un même article est certainement chose exceptionnelle. Bien sûr, de tout temps des mathématiciens ont œuvré en ignorant que d'autres étudiaient le même sujet, et ont produit des théories ressemblantes ; même dans les temps actuels où les communications sont on ne peut plus étendues et rapides, de tels phénomènes se produisent encore à tous les niveaux de la recherche, la population de chercheurs d'un même domaine et l'ensemble des revues disponibles étant trop importants pour être appréhendés. Mais ici la seconde guerre mondiale a créé une situation tout-à-fait particulière. D'une part si Freudenthal, Eilenberg et Mac Lane ont pu contribuer à la naissance de l'homologie des groupes sans avoir connaissance de l'article de 1945 de Hopf, c'est en partie dû au laps de temps séparant cet article de celui de 1942. Ce délai est probablement bien supérieur à ce qu'il aurait été en période de paix[1] – il n'y a qu'à comparer par exemple à la rapidité avec laquelle Eilenberg et Mac Lane ont réagi à l'article de 1942 de Hopf via [69] qui eux ont, par chance, eu les *Commentarii Mathematici Helvetici* de 1942 à disposition rapidement ! D'autre part la guerre a certainement eu un effet important sur la nature de la contribution de Freudenthal. En effet, celui-ci était proche de Hopf, qui avait dirigé sa thèse[2] et avec lequel il entretenait une correspondance, rendue évidemment chaotique par la guerre[3]. S'il avait connu les derniers développements de Hopf, aurait-il rédigé son article de la même façon – l'aurait-il même simplement rédigé ?

Outre l'importance que revêtent en elles-mêmes ces diverses publications pour le développement des mathématiques, elles offrent une situation singulière du point de vue historique : à une découverte mathématique majeure, en l'occurrence la détermination du deuxième groupe d'homologie d'un complexe connexe via son groupe fondamental, ont répondu plusieurs recherches menées de façon indépendante révélant toutes divers aspects du potentiel contenu dans la découverte originelle. Les points communs et les différences entre ces contributions sont aussi significatifs. Si les premiers traduisent le caractère incontournable de certains aspects éclairés par le papier initial de Hopf, les seconds relèvent plutôt de la sensibilité et des influences de chaque mathématicien. Nous attachant à commenter ces ressemblances et dissemblances, nous allors, par l'étude de ces contributions, pouvoir appréhender la richesse mathématique des considérations originelles de Hopf et découvrir, en même temps que la naissance concrète de l'homologie et de la cohomologie des groupes, les premières perspectives de ces théories.

Nous nous concentrerons dans ce chapitre sur les travaux de Freudenthal et d'Eckmann, préférant réserver un seul et même chapitre à l'analyse du travail d'Eilenberg et Mac Lane. Mais avant cela, vu qu'ils font intervenir la cohomologie des espaces (et aboutissent chez Eckmann à la définition de la

[1] Hopf était allemand, et bien qu'étant à Zürich lors de la seconde guerre mondiale, il connut de nombreux problèmes. Il tenta notamment de faire émigrer ses parents vers la Suisse mais son père tomba gravement malade au moment de faire le voyage et mourut finalement à Breslau en 1942. Il vit ensuite ses propriétés en Allemagne confisquées et fut peu après informé qu'il risquait d'être déchu de la nationalité allemande s'il ne rentrait pas au pays : il ne put s'en sortir qu'en demandant la nationalité suisse, qu'il obtint. Pour plus de détails sur ce sujet, cf. [85] p. 1002.

[2] Freudenthal accomplit sa thèse *Über die Enden topologischer Raüme und Gruppen* [86] à Berlin et la soutint en 1930.

[3] W.T. van Est indique dans [77], p. 1013, que la correspondance fut maintenue de manière irrégulière (et ne fut donc a priori pas totalement interrompue). Mais l'addendum en dernière page de l'article de Freudenthal semble montrer qu'il n'était pas au courant de la parution du travail de Hopf.

cohomologie des groupes), nous revenons sur les grandes lignes de la naissance de cette théorie[4].

8.1 Introduction à la cohomologie des espaces

8.1.1 les précurseurs de la cohomologie

Depuis Poincaré lui-même, toute une partie de la topologie s'est occupée de la notion de dualité. Il y a deux grands types de dualité, la dualité de Poincaré et la dualité d'Alexander. Sans entrer dans les détails techniques, la dualité de Poincaré exprime le fait que pour une variété n-dimensionnelle compacte que l'on peut diviser en cellules de manière raisonnable, les nombres de Betti en dimension r et $n-r$ coïncident, de même que les nombres de torsion en dimension r et $n-r-1$. Poincaré avait établi cette dualité au niveau des polyèdres, en associant à un polyèdre son "dual"[5]. On peut également montrer qu'un polyèdre et son dual partagent une subdivision commune, la "subdivision barycentrique", ce qui aide à établir l'invariance des groupes d'homologie en la subdivision.

La dualité d'Alexander concerne, elle, le lien entre les propriétés topologiques de $\mathbb{R}^n \setminus K$, si K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, et K – ou, ce qui revient au même[6], entre $S^n \setminus K$ et K si K est un sous-ensemble compact de

[4]Un exposé plus complet pourra être trouvé dans [158].

[5]Ou, selon la terminologie originelle de Poincaré, son polyèdre "réciproque". Dans [245], p.103, Whitney donne l'heuristique de la construction de Poincaré pour une variété compacte orientée dont on possède une subdivision cellulaire. Le complexe dual est construit de la manière qui suit. On commence par ajouter un nouveau sommet dans chaque n-cellule. On construit ensuite une 1-cellule pour chaque $(n-1)$-cellule originelle en reliant deux sommets précédemment ajoutés. Puis on construit une 2-cellule pour chaque $(n-2)$-cellule originelle, dont le bord est formé de 1-cellules obtenues à l'étape précédente, etc. On aboutit ainsi à une nouvelle subdivision de la variété, dite "duale". Les r-cellules du complexe original sont en correspondance biunivoque avec les $(n-r)$-cellules de la subdivision duale et les nombres d'incidences sont respectés par le procédé de dualisation, ce qui fait que les nombres de Betti en dimension r du complexe originel et les nombres de Betti en dimension $n-r$ du complexe dual coïncident, de même que les nombres de torsion respectifs en dimensions r et $n-r-1$. Mais le complexe dual est également une subdivision de la variété de départ. Les nombres de Betti et de torsion étant des invariants topologiques, ils doivent être identiques pour le complexe originel et le complexe dual. Ainsi, les nombres de Betti de la variété sont identiques en dimensions r et $n-r$ et ses nombres de torsion en dimensions r et $n-r-1$ sont égaux.

[6]Sur ce point, et de manière générale pour tout ce qui concerne des formulations précises et modernes des théorèmes de dualité, on pourra consulter [57] VIII.8. Le fait de pouvoir se placer dans S^n plutôt que dans $\mathbb{R}^n$ était déjà indiqué et mis en œuvre par Alexander dans son article original [3].

S^n. En 1922, dans [3], Alexander établit que sous certaines conditions[7] sur K, le r-ième nombre de Betti de $S^n \setminus K$ est égal, modulo 2, au $(n-r-1)$-ième nombre de Betti de K. Le problème fut étendu au cours des années suivantes[8] à des variétés quelconques et aux nombres de Betti non pris modulo 2.

L'énoncé de la dualité de Poincaré dans un cadre général se heurtait au fait qu'il n'existe de subdivision duale que pour une variété orientée. Lefschetz tenta de résoudre ce problème via l'introduction de "pseudo-cycles"[9] obtenus en plongeant un complexe simplicial fini dans une sphère de dimension assez grande (c'est-à-dire en le considérant comme sous-complexe d'une subdivision simpliciale d'une certaine n-sphère) et en utilisant la subdivision duale de cette sphère. Mais cette construction n'était pas encore satisfaisante.

Outre la volonté de clarifier les hypothèses nécessaires pour obtenir chaque dualité, et de les généraliser, un moteur des investigations sur ce sujet fut la théorie des intersections. Cette théorie prend, elle aussi, ses sources dans le travail de Poincaré[10] via la notion de nombre d'intersection entre deux sous-variétés orientées V_1 et V_2, de dimensions respectives r et $n-r$, d'une variété compacte connexe orientée V de dimension n. Si V_1 et V_2 s'intersectent transversalement[11] en un point P, l'idée est que si $(t_1, ..., t_p)$ est une famille orientée positivement de l'espace tangent à V_1 en P et $(t_{p+1}, ..., t_n)$ une famille orientée positivement de l'espace tangent à V_2 en P alors $(t_1, ..., t_p, t_{p+1}, ..., t_n)$ est orientée positivement ou négativement par rapport à l'espace tangent en P à V. Selon ce signe, Poincaré définit le nombre $S(P)$ d'intersection de V_1 et V_2 en P comme valant 1 ou -1.

Si V_1 et V_2 s'intersectent transversalement en un nombre fini de points P_i, on définit leur nombre d'intersections comme étant $N(V_1, V_2) = \sum_i S(P_i)$. Lorsque la construction du complexe dual est licite, on peut adapter cette définition[12] afin de créer un "indice de Kronecker" $N(a_p, b^*_{n-p})$ entre une p-

[7] Outre le texte d'Alexander, on pourra également aller voir [55] pp. 56-57.

[8] On peut trouver un compte-rendu de ce développement dans un article d'époque (1931) de Lew Pontrjagin, cf. [185] pp. 165-172. Il insiste notamment sur l'inspiration puisée au sein de la théorie des intersections, développée par Lefschetz.

[9] Cf. [143].

[10] Cf. [55] p. 21-22. C'est en fait avec la théorie des intersections que Poincaré établit initialement son théorème de dualité dans son premier papier sur la topologie, *Analysis situs* [180]. L'idée était que toute homologie $V_1 + ... + V_k \sim 0$ entre des sous-variétés r-dimensionnelles d'une variété n-dimensionnelle U est équivalente à l'existence d'un $(n-r)$-cycle V tel que $\sum_{i=1}^k N(V, V_i) = 0$ (voir un peu plus loin pour la signification de N). Cette équivalence fut remise en cause par Poul Heegard (on trouve une brève analyse de la dissertation de Heegard dans [228]). C'est avec l'idée du complexe dual que Poincaré répondit à cette critique dans le premier Complément [181] (néanmoins il ne s'agit que d'une preuve établie pour un polyèdre dans un espace de dimension 4).

[11] C'est-à-dire de sorte que leurs espaces tangents en P s'intersectent au seul point P.

[12] Cf. [55] p. 51.

cellule a_p du complexe original et sa cellule duale b^*_{n-p}.[13] On peut montrer que la quantité $N(a_p, b^*_{n-p})$ dépend uniquement des classes d'homologie de a_p et b^*_{n-p},[14] ce qui revient à dire, en termes modernes, que N définit une forme bilinéaire sur le produit $H_p \times H_{n-p}$ des groupes d'homologie en dimensions p et $n-p$ du complexe.

Au cours des années 1920, Alexander et Lefschetz poussèrent plus loin l'idée d'intersection, inspirés en cela, selon Jean Dieudonné[15], par leurs travaux initiaux en géométrique algébrique, domaine dans lequel existait la notion de "produit" $V.W$ de sous-variétés, recouvrant dans certains cas l'intersection ensembliste $V \cap W$. Dans le cadre des complexes cellulaires, cette généralisation de l'intersection s'exprima chez Lefschetz par la possibilité d'associer à deux cycles C_p et C_q de dimensions respectives p et q un cycle de dimension $p+q-n$, si n est la dimension du complexe[16]. Cette opération, appelée "produit", ne dépend en fait que des classes d'homologie de C_p et de C_q, ce qui fait qu'elle détermine une application bilinéaire de $H_p \times H_q$ dans H_{p+q-n}. Bien sûr, si $q = n-p$, on retrouve l'indice de Kronecker évoqué plus haut.

8.1.2 La naissance de la cohomologie des espaces

Comme nous l'avons mentionné, les divers résultats sur la dualité souffraient d'un manque de généralité. Qui plus est, ils se contentaient d'évoquer les nombres de torsion ou de Betti, sans réussir à passer aux groupes d'homologie. Les premières contributions à avoir gommé ces défauts sont celles de Pontrjagin dans la première moitié des années 1930. Dans [186] notamment, en 1934, il relie l'homologie d'un compact F de $\mathbb{R}^n$ à celle de $\mathbb{R}^n \setminus F$. Pour cela, il considère l'homologie de Vietoris[17] et raisonne avec des coefficients différents pour l'homologie sur F et l'homologie sur $\mathbb{R}^n \setminus F$. S'il choisit un groupe discret $\mathfrak{G}$ de coefficients pour l'homologie de $\mathbb{R}^n \setminus F$ alors il prend le groupe X des caractères de $\mathfrak{G}$ pour l'homologie de F.

[13] Cf. par exemple le paragraphe 8 de [241], Weyl appelant l'indice de Kronecker "caracteristica".

[14] Cf. par exemple [212] p. 278.

[15] Cf. [55] §4.D.

[16] Une intuition de cette idée d'intersection peut provenir de la considération d'un complexe et de son dual, cf. [245] p. 104. En effet, lorsqu'un p-cycle du complexe originel et un q-cycle du complexe dual ont une intersection non vide, celle-ci se trouve être un cycle de dimension $p+q-n$ du complexe obtenu par subdivision barycentrique.

[17] On pourra se référer au chapitre sur la naissance des groupes d'homologie où nous avons retranscrit la définition des groupes d'homologie proposée par Vietoris pour les espaces compacts.

Concrètement, si l'on dispose de deux chaînes en position générale[18] $\alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_i$ et $a = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_j^{'}$ d'un espace euclidien de dimension n, de dimensions respectives r et $n-r$, où les ϵ_i et $\epsilon_j^{'}$ sont des simplexes orientés, les α_i des coefficients dans X et les a_j des coefficients dans $\mathfrak{G}$, alors Pontrjagin définit un produit (dit "indice d'intersection de α et a") $X(\alpha, a)$ via :

$$X(\alpha, a) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_i a_j X(\epsilon_i, \epsilon_j^{'}).$$

Dans cette formule, $\alpha_i a_j$ a un sens car X est le groupe des caractères de $\mathfrak{G}$ et $X(\epsilon_i, \epsilon_j^{'})$ désigne le nombre d'intersection tel que défini par Lefschetz[19]. Le produit bilinéaire ainsi introduit détermine une dualité. Si B_X^r désigne le groupe d'homologie en dimension r de F et $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}}^{n-r-1}$ celui en dimension $n-r-1$ de $\mathbb{R}^n \setminus F$, Pontrjagin montre que B_X^r et $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}}^{n-r-1}$ sont duaux. Il en déduit que B_X^r et $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}}^{n-r-1}$ sont groupes des caractères l'un de l'autre. Cela fournit ainsi un énoncé général à la dualité d'Alexander.

Très peu après, en 1935, la Conférence Internationale de Topologie de Moscou (qui se déroule du 4 au 10 septembre) assiste à la naissance de la cohomologie. Andreï Kolmogoroff, connu pour ses contributions à la théorie des probabilités et de l'intégration, mais jusque là étranger à la topologie, fait à l'auditoire de la conférence la surprise de venir s'exprimer. Son exposé traite de dualité dans les complexes et introduit une multiplication en leur sein[20]. Il se trouve que les nouveautés en termes de concepts et de résultats présentées par Kolmogoroff étaient pour l'essentiel partagées par Alexander, ce qu'il signala dès la fin de l'exposé. Les considérations d'Alexander étaient d'ailleurs déjà sous presse[21], comme celles de Kolmogoroff. Cette coïncidence donna à Whitney, présent à cet événement, le sentiment suivant[22] : "From the reputations of these mathematicians, there must be something real going on ; but it was hard to see what it might be."

Les motivations d'Alexander et de Kolmogoroff étaient sensiblement différentes, malgré la proximité de leurs théories. Pour Kolmogoroff le but était de mieux comprendre les dualités de Poincaré et d'Alexander, ou en tout cas de les comprendre autrement, en analysant la dualité topologique à partir de la dualité algébrique. Il est clair que les travaux de l'année précédente de

[18] Cf. [142].

[19] Ibid.

[20] Cet exposé est repris dans [136] et [137].

[21] Il s'agit de [5] et [6].

[22] Cf. [245] p. 110.

Pontrjagin constituèrent une grande source d'inspiration[23]. Pour Alexander, il est plus difficile de cerner ses sources car il n'en cite aucune dans [5] comme dans [6]. Néanmoins il identifie dans son travail une analogie avec le théorème de Stokes et utilise un vocabulaire propre à la théorie de l'intégration. Par ces aspects, il semble s'être inspiré des travaux de Cartan sur l'intégration dans les groupes de Lie et les espaces homogènes[24].

L'idée à la base du travail de Kolmogoroff était d'introduire une opération duale du bord, qui associerait à une r-chaîne non pas une $(r-1)$-chaîne mais une $(r+1)$-chaîne. Il part d'un complexe cellulaire fini, dont chaque cellule est orientée et dont les chaînes sont à coefficients dans un groupe abélien J. Plutôt que de noter les r-chaînes sous la forme $\sum_{\text{finie}} \alpha_k^r x_k^r$, où les α_k^r sont des éléments de J et les x_k^r des cellules de dimension r, Komogoroff préfère voir les r-chaînes comme des fonctions[25] f^r, de source l'ensemble C^r des r-cellules, et à valeurs dans J (les f^r sont donc définies par $f^r(x_k^r) = \alpha_k^r$). Le bord d'une cellule de dimension r étant une somme de cellules de dimension $r-1$, dites incidentes, celui-ci se traduit en tant qu'opérateur (noté g_u) sur les fonctions par

$$g_u f^r(x^{r-1}) = \sum_{x^r \to x^{r-1}} f^r(x^r),$$

où la somme est prise sur l'ensemble des cellules x^r incidentes à x^{r-1}.

L'opération duale g_0 du bord g_u est obtenue en associant à une fonction f^r une fonction de source C^{r+1} définie par :

$$g_0 f^r(x^{r+1}) = \sum_{x^{r+1} \to x^r} f^r(x^r),$$

où la somme est cette fois prise sur l'ensemble des cellules x^r incidentes à x^{r+1}. Cette définition est probablement inspirée par la construction du complexe dual, dans laquelle si une $(r-1)$-cellule x^{r-1} appartient au bord

[23] Ils sont cités à plusieurs reprises dans [136]. Notons aussi que Kolmogoroff et Pontrjagin étaient tous les deux russes et, à cette époque, membres de la Faculté de Moscou.

[24] Cf. [55] p. 63 et pp. 78-79.

[25] Bien que cette vision des chaînes en terme de fonctions ne change rien dans le cadre des complexes finis, elle a néanmoins l'avantage d'opérer aussi dans le cadre des complexes infinis – ce que Kolmogoroff précise à la page 206 de [136]. Les chaînes peuvent toujours être vues comme des fonctions mais dans le cas des complexes infinis il existe des fonctions qui ne sont pas des chaînes, car combinaisons linéaires infinies de cellules. Elles permettent en outre d'exprimer le bord (ou plutôt le "cobord", cf. plus loin) des chaînes dans les complexes infinis, qui sont éventuellement composés d'une infinité de cellules. Comme on le verra un peu plus loin, Alexander prend lui le parti de distinguer dès le départ chaînes et fonctions, et il vaut peut-être mieux avoir ce point de vue, plus clair, à l'esprit.

d'une r-cellule x^r alors la cellule duale x_*^{n-r} de x^r appartient au bord de la cellule duale x_*^{n-r+1} de x^{r-1}, la dualité conservant donc l'incidence mais en la renversant.

L'opérateur g_u étant le bord traditionnel, il définit classiquement les groupes d'homologie, que Kolmogoroff appelle u-homologie, associés au complexe. Mais on peut vérifier que l'opérateur g_0 est aussi un bord[26], au sens où il satisfait à la relation $g_0 g_0 = 0$. On peut donc définir les 0-cycles (i.e. les fonctions telles que $g_0 f^r = 0$), les 0-bords, et par conséquent une 0-homologie.

On peut, d'après le procédé de Poincaré, associer à tout espace cellulaire orienté R de dimension n un espace cellulaire dual, de sorte qu'à toute r-cellule de l'espace originel correspond biunivoquement une $(n-r)$-cellule de l'espace dual, en respectant orientations et incidences. L'espace dual est unique à isomorphisme près et est noté $D_n R$. On peut montrer qu'à toute fonction f^r de R correspond une fonction h^{n-r} de $D_n R$, de sorte que $f^r = g_u f^{r+1} \Leftrightarrow h^{n-r} = g_0 h^{n-r-1}$ et $f^{r+1} = g_0 f^r \Leftrightarrow h^{n-r-1} = g_u h^{n-r}$, ce dont on déduit

$$B_u^r(R, J) \simeq B_0^{n-r}(D_n R, J),$$

où B_u^r désigne le r-ième groupe de u-homologie (donc le groupe d'homologie habituel) et B_0^{n-r} le $(n-r)$-ième groupe de 0-homologie. Ce dernier groupe est maintenant appelé "groupe de cohomologie".

Ainsi, si R est une décomposition cellulaire d'une variété fermée M^n de dimension n alors il en est de même de $D_n R$. L'invariance de l'homologie en la subdivision implique donc :

$$B_u^r(M^n, J) \simeq B_0^{n-r}(M^n, J),$$

c'est-à-dire une dualité au sens de Poincaré.

Kolmogoroff transpose également l'idée de Pontrjagin de considérer des groupes de coefficients A et B qui sont groupes des caractères l'un de l'autre. Il définit un produit, similaire à celui de Pontrjagin, entre une fonction f^r à valeurs dans A et une fonction h^r à valeurs dans B, via

$$f^r \times h^r = \sum_{x^r \in R} f^r(x^r) h^r(x^r)$$

pour lequel g_u et g_0 sont des opérateurs adjoints. Kolmogoroff retrouve ainsi la dualité de Pontrjagin en montrant que $B_0^r(R, B)$ est le groupe des caractères de $B_0^{n-r}(R, A)$. Il parvient également à un théorème de dualité de type Alexander en montrant que $B_u^{r-1}(K, A)$ et $B_u^{n-r}(S^n \setminus \bar{K}, B)$ sont groupes de

[26] Nous dirions plutôt "cobord".

caractères l'un de l'autre, K désignant un sous-complexe d'une décomposition cellulaire de la sphère S^n.

Alexander avait donc obtenu à la même période des résultats très proches de ceux de Kolmogoroff. Ils s'appliquaient à des complexes cellulaires aussi bien finis qu'infinis. Chez Alexander, contrairement à ce qu'on a pu voir chez Kolmogoroff, cohabitaient le concept de fonction et celui de chaîne. Ainsi, si une chaîne représentait une combinaison linéaire finie de cellules, une fonction représentait une combinaison linéaire quelconque des cellules[27]. De plus Alexander se plaçait uniquement dans le cas où les chaînes étaient à coefficients dans un groupe abélien A, et les fonctions dans le groupe des caractères B de A. Cela lui permettait de définir un crochet de dualité entre une fonction et une chaîne, identique à celui de Kolmogoroff[28]. Ce crochet était appelé "integral" : cela rejoint l'idée que Dieudonné se fait de l'inspiration d'Alexander, à savoir le fait de voir l'intégrale d'une forme différentielle ω le long d'un cycle c comme un crochet de dualité $(c, \omega) = \int_c \omega$. On retrouve ensuite la même chose que chez Kolmogoroff, avec la considération de l'opérateur dual du bord[29], la définition de l'équivalent du groupe $B_0^r(R, B)$ et le fait que ce groupe est groupe des caractères du groupe d'homologie en dimension r du complexe de chaînes à coefficients dans A.

Dans ce qui précède, on a vu les premières occurrences de ce qui sera très rapidement appelé par la suite la "cohomologie" d'un complexe. Pour l'obtenir, on ne regarde donc pas les chaînes mais les fonctions des cellules, munies d'un opérateur dual du bord sur les chaînes, que l'on appelle cobord[30]. Néanmoins ce que nous venons de raconter des travaux d'Alexander et Kolmogoroff n'en est pas la partie spectaculaire qui provoqua la perplexité de Whitney[31], leurs développements s'inscrivant en effet dans la droite ligne

[27]C'est bien une fonction au sens où on peut la voir comme une application de l'ensemble des cellules d'une même dimension dans le groupe des coefficients, associant à une cellule le coefficient, éventuellement nul, avec lequel elle apparaît dans la combinaison linéaire.

[28]La seule différence étant que chez Kolmogoroff le crochet $f^r \times h^r$ était pris entre deux de ses r-fonctions, qui revenaient à des chaînes.

[29]Nous prenons à partir de maintenant l'habitude d'appeler cet opérateur le "cobord". Là encore, chez Alexander, la terminologie renvoie clairement à la théorie de l'intégration des formes différentielles, le cobord d'une fonction étant appelé "derived" et une fonction de cobord nul dite "exact". L'intégrale $\int_c \omega$ d'une forme différentielle C^1 fermée ω sur un cycle c est nulle si c est un bord ou si ω est exacte, de même que le crochet d'un cobord avec un cycle ou d'un cocyle avec un bord est nul.

[30]Les notions de la cohomologie sont désignées par analogie avec celles de l'homologie et à l'aide du préfixe "co" : on parle ainsi de cochaîne, cocycle, cobord, etc.

[31]Cf. la citation de Whitney plus haut.

des travaux sur la dualité de Pontrjagin. Ce qui provoqua la surprise de l'auditoire de la Conférence de Moscou est la deuxième partie de l'exposé de Kolmogoroff [137], également dans une large mesure obtenue par Alexander au même moment [6]. Nous allons cette fois commencer par exposer le travail d'Alexander.

Dans [6], Alexander affirme, sans entrer dans les détails, qu'il peut associer à un espace métrique compact C un invariant topologique sous la forme d'un anneau. Il semble s'inspirer de l'homologie de Vietoris pour définir l'homologie d'un tel espace. Ce sont notamment les ensembles ordonnés de points de C, invariants par permutation paire, qui jouent le rôle de simplexes[32]. Les "i-fonctions" qu'il introduit sont des fonctions anti-symétriques de $i+1$ points de l'espace C, à valeurs dans un groupe abélien donné A. Si A possède aussi une structure d'anneau, alors Alexander définit un produit entre une i-fonction F et une j-fonction G via :

$$(F \times G)(x_0, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j+1}) =$$
$$\frac{1}{(i+1)!(j+1)!} \sum_{\alpha \in \Sigma_{p+q+2}} \epsilon(\alpha) F(x_{\alpha(0)}, ..., x_{\alpha(i)}) G(x_{\alpha(i+1)}, ..., x_{\alpha(i+j+1)}).$$

Ce produit est associatif et fait donc de l'ensemble des i-fonctions, où i décrit tout $\mathbb{N}$, un anneau[33] R. Il vérifie aussi, si δ désigne le cobord, $\delta(F \times G) = \delta F \times G = \pm(F \times \delta G)$, ce qui fait qu'il est bien défini sur les classes de cohomologie associées aux i-fonctions[34].

Alexander a donc l'idée d'introduire un produit sur les fonctions mais il donne une formule sans justification géométrique qui a dû paraître mystérieuse. Même avec le recul, cette formule semble étrange[35] notamment parce qu'à une p-fonction et une q-fonction elle associe une $(p+q+1)$-fonction et non une $(p+q)$-fonction.

Le produit proposé ici par Alexander ne convenait donc pas mais l'idée était là en tout cas : que l'on peut munir les fonctions d'un produit et faire ainsi de leur ensemble un anneau[36]. La cohomologie présenterait ainsi plus

[32] Ce que fait Alexander est donc également valable pour des complexes simpliciaux.

[33] Il s'agit du précurseur de la notion d'anneau de cohomologie. Eckmann fera d'ailleurs référence à cet article d'Alexander en introduction de [59].

[34] En fait Alexander ne précise pas cet aspect ! Pour lui, l'important avec ces relations est qu'elles font de l'ensemble des i-fonctions exactes (i.e. de cobord nul) un idéal de R, de même que l'ensemble des i-fonctions dérivées (i.e. qui sont elles-mêmes un cobord). Le quotient du premier idéal par le second est également un invariant topologique de C mais Alexander ne montre pas quel usage on peut en avoir.

[35] On pourra consulter [158], pp. 584-5, sur ce point ainsi que sur les formules de produit proposées par Kolmogoroff.

[36] Il est difficile d'expliquer pourquoi son produit a pris cette forme-là, mais qu'il ait cherché à mettre un produit sur des fonctions est plutôt naturel.

de structure que l'homologie, dans laquelle seuls des groupes – ou, si l'on préfère, des modules – interviennent. Lors de la Conférence, Kolmogoroff avait également proposé de munir les fonctions (d'abord sur un complexe simplicial avant de généraliser à des espaces localement compacts) de produits[37]. Son premier produit est quasiment le même que celui d'Alexander, donc avec les mêmes problèmes. Son deuxième est par contre beaucoup plus satisfaisant et est, à un facteur multiplicatif près, celui qui sera retenu ensuite, et couramment appelé le produit "cup".

Cette théorie juste naissante et tâtonnante des produits sera très vite revue et corrigée par Alexander, Čech, Freudenthal ou Whitney pour n'en citer que quelques-uns. On peut rapidement en trouver un exposé clair et détaillé, comme par exemple dans *On products in a complex* de Whitney, en 1938 [243]. Pour synthétiser, on a vu émerger l'idée que l'on pouvait associer à un complexe simplicial ou cellulaire voire, en utilisant l'homologie de Vietoris, à un espace métrique compact, de nouveaux objets algébriques. Il s'agit de groupes, les groupes de cohomologie, qui sont obtenus par un procédé dual de l'homologie et sont des invariants topologiques. Ils sont déterminés concrètement à l'aide des i-fonctions, ou "i-cochaînes", sur lesquelles peut être défini un produit, le produit "cup"[38]. La somme directe des groupes de cohomologie en toute dimension devient un anneau à l'aide de ce produit.

8.2 Deux approches d'une même construction

La personnalité du mathématicien allemand, naturalisé néerlandais, Hans Freudenthal (1905-1990), attise naturellement la curiosité lorsqu'on étudie l'histoire de la topologie algébrique. Etudiant de l'Université de Berlin, il fut attiré par la topologie du fait de l'influence de deux hommes, Erhard Schmidt et Heinz Hopf, qui devint finalement son directeur de thèse. En 1927, il eut l'occasion d'entrer en contact avec Brouwer, invité à Berlin durant trois mois afin de donner des conférences sur l'intuitionnisme. Peu après la fin de sa thèse [86], en 1930, celui-ci le convia à devenir son assistant à l'Universiré d'Amsterdam où il rencontra un autre de ses assistants, Witold Hurewicz.

[37] Cf. [137].

[38] Nous en verrons une définition précise dans l'analyse de l'article d'Eckmann. Précisons dès maintenant qu'il vérifie vis-à-vis du cobord δ la relation $\delta(F \times G) = (\delta F) \times G \pm F \times (\delta G)$, c'est-à-dire précisément la formule usuelle de dérivation d'un produit de formes différentielles. Du point de vue d'Alexander et de son analogie avec l'intégration de formes différentielles, un produit vérifiant une telle relation se montre bien plus satisfaisant que celui qu'il avait proposé initialement !

De plus, l'homme, et pas seulement le mathématicien, se distingue. Qualifié d'"Homo Universalis" par le président de l'Université d'Utrecht lors des cérémonies d'ouverture de l'institut qui porte son nom[39], Hans Freudenthal était en effet un homme dont la curiosité et l'érudition touchaient à tous les domaines. Si l'on doit en rester aux mathématiques, nous devons signaler qu'il a œuvré en géométrie, théorie des groupes de Lie, théorie des algèbres de Lie et topologie bien sûr[40], mais également en histoire et en didactique[41].

Spécialiste de topologie algébrique, côtoyant Hurewicz jusqu'à ce que celui-ci émigre aux Etats-Unis en 1936, proche de Hopf, avec lequel il entretint – autant que possible – une correspondance régulière, Freudenthal semble devoir se poser assez inévitablement en acteur dans le développement de l'homologie et de l'homotopie à l'époque qui nous intéresse ici. Et en effet une de ses contributions ([87]) se révèle incontournable dans le cadre de notre étude. Elle apparaît d'autant plus précieuse en tant que matériau historique, qu'elle est l'œuvre non seulement d'un mathématicien, mais de quelqu'un particulièrement sensible à la manière de transmettre les connaissances. Si, bien entendu, à l'époque de la rédaction de l'article que nous allons analyser juste après, Freudenthal n'était pas encore véritablement impliqué dans la didactique, la forme de son papier – et par certaines aspects, le contenu – se distinguent fortement de certains traits caractéristiques que nous avions pu mettre en évidence chez Hopf, et sont révélateurs dans une certaine mesure de la personnalité de Freudenthal. Une comparaison avec l'article de 1945 de Hopf se propose donc, et de manière d'autant plus pertinente que les sujets abordés sont les mêmes.

Freudenthal débute son article exactement de la même façon que celui de Hopf, en rappelant les résultats de Hurewicz et en posant la question du comment de la détermination des groupes d'homologie d'un espace asphérique par le groupe fondamental. Il place son questionnement sous l'égide de la généralisation du résultat obtenu par Hopf en dimension 2 en rappelant – et en citant Hopf – que pour un polyèdre asphérique en dimension 2 à $n-1$, les quotients[42] $\mathfrak{Z}^j/\bar{\mathfrak{S}}^j$, $j = 2, ..., n$, ne dépendent que de son groupe fondamental. Il ne faut à vrai dire pas s'étonner outre mesure de cette proximité avec la démarche de Hopf car Freudenthal s'inspire directement – et les cite

[39] Cf. [2] p. 9.

[40] Cf. [21] p. 106.

[41] Le peu que nous en disons ici ne peut rendre compte de l'investissement de Freudenthal dans la défense et la recherche de l'amélioration de l'enseignement mathématique, cf. [2] pour plus de détails.

[42] Il s'agit ici des notations de Hopf. On rappelle qu'on a également l'isomorphisme $\mathfrak{Z}^j/\bar{\mathfrak{S}}^j \simeq \mathfrak{B}^j/\mathfrak{S}^j$

– de l'article de Hopf de 1942 et de son supplément [122]. Il reprend donc à son compte la problématique soulevée par Hopf, sans en changer les termes.

S'il ne concède pas avoir puisé dans le travail de Reidemeister une aide comparable à celle que Hopf y avait trouvée, Freudenthal explique néanmoins avoir préféré travailler dans le cadre (commutatif) des groupes d'homologie – et non, comme Hopf l'avait fait dans [121], partir de considérations au sujet du groupe fondamental, donc dans un cadre non forcément commutatif – mais en les munissant de l'action du groupe fondamental, citant Reidemeister pour avoir montré comment ceci est possible. Il est très clair que Freudenthal a étudié l'article [191] de Reidemeister que nous avons analysé au chapitre précédent car il en corrige l'affirmation selon laquelle le k-ième groupe d'homotopie[43] modulo $\mathfrak{G}$ est le k-ième groupe d'homologie. Pour autant sa méthode apparaît véritablement éloignée des constructions de Reidemeister, bien plus en tout cas que celle de Hopf.

En fait Freudenthal s'inspire fortement de ce que Hopf avait fait dans le cadre topologique en 1942. Sa méthode en apparaît même simplement comme une généralisation en dimension supérieure à 2.

Etant donné que nous sommes entrés dans certains détails des preuves de Hopf, nous nous en affranchissons dans une certaine mesure ici – car ce serait parfois redondant et de manière générale peu éclairant – pour nous contenter des grandes lignes suivies par Freudenthal, selon l'ordre qu'il en donne dans son introduction.

Il prend pour point de départ la notion de "cerf-volant" ("Drachen") i-dimensionnel, à savoir l'assemblage d'un simplexe i-dimensionnel t_i et d'un chemin d'arêtes oa, reliant un point fixé initialement o à un des sommets a de t_i. On peut définir une action du groupe fondamental G du polyèdre P sur les "cerf-volants" en définissant gd_i, où g est dans G et d_i est un "cerf-volant" i-dimensionnel, comme l'assemblage du simplexe t_i et du chemin d'arêtes woa, où w est un chemin d'arêtes réalisant g.

Comme l'indique Freudenthal, les cerfs-volants ont une interprétation évidente : l'ensemble des gd_i, lorsque g parcourt G, est précisément l'ensemble des simplexes situés au-dessus de t_i dans le revêtement universel $\tilde{P}$ de P[44]. L'ensemble des cerfs-volants i-dimensionnels de P engendre un groupe abélien F_i, muni d'une structure de G-module, et même de $\mathbb{Z}[G]$-module.

Freudenthal affirme que l'on peut appliquer les notions usuelles de l'homologie aux groupes F_i mais que pour retrouver l'homologie habituelle – à

[43] Au sens de Reidemeister.

[44] La construction du revêtement universel dans le Seifert&Threlfall revient bien à la considération des cerfs-volants.

savoir celle de P – il faut rendre égaux à 1 tous les éléments de G, ce qui revient à raisonner modulo l'idéal Ω de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par les éléments $g-1$.

Pour parler d'homologie sur les F_i, il faut définir une opération bord. Freudenthal en donne la formule précise, l'idée géométrique qu'elle traduit étant que le bord $\mathfrak{r}$ d'un cerf-volant formé du chemin d'arêtes v et du simplexe t_i est formé de v et du bord de t_i.[45] En dimension 0, le bord envoie tout cerf-volant sur 1. L'opération ainsi définie est bien un bord au sens où elle vérifie $\mathfrak{r}(F_i) \subset F_{i-1}$ et $\mathfrak{r}\mathfrak{r} = 0$. Il s'agit également d'un morphisme de $\mathbb{Z}[G]$-module. Son noyau est noté R_i, il est donc formé de l'ensemble des i-cerfs-volants de bord nul, ou, autre façon de voir, de l'ensemble des i-cycles du revêtement universel.

Si l'on note ω le morphisme de $\mathbb{Z}[G]$ dans $\mathbb{Z}$ défini en envoyant tout g sur 1, l'idéal Ω est précisément son noyau. Freudenthal prolonge ω en un morphisme de source F_i et à valeurs dans l'ensemble des i-simplexes de P, en posant $\omega d_i = t_i$. Le noyau de ω est ΩF_i. Si l'on considère les cerfs-volants comme les éléments du revêtement universel $\tilde{P}$ de P, alors ω s'interprète évidemment comme la projection de $\tilde{P}$ sur P.

A l'exception de la terminologie des cerfs-volants, les objets introduits par Freudenthal ne sont en rien nouveaux par rapport à ceux considérés par Hopf dans le paragraphe topologique. On notera cependant que l'ordre d'exposition de Freudenthal n'est pas invesé comme celui de Hopf car il prend ces considérations topologiques comme point initial de ses réflexions, et ajoute les structures algébriques qui lui semblent pertinentes au fur et à mesure de l'avancée du propos.

Ce cadre étant posé, Freudenthal en vient à s'intéresser à l'asphéricité. Il dit de P qu'il est i-asphérique si toute image continue d'une i-sphère dans P se prolonge en une image continue d'une i-boule. Freudenthal précise que $\tilde{P}$ est toujours 1-asphérique et que si P est i-asphérique, $\tilde{P}$ est i-asphérique. Il fait référence à Hurewicz ([129] IV p. 215-6) pour cela.

Lorsque Freudenthal cherche à traduire algébriquement l'asphéricité, il commence par préciser que $R_0 = \mathfrak{r}F_1$ (par définition de $\mathfrak{r}$ en dimension 0) et $R_1 = \mathfrak{r}F_2$ car $\tilde{P}$ est simplement connexe. Il en vient ensuite à affirmer que si P est j-asphérique pour tout j, $2 \leq j < i$, alors $R_{i-1} = \mathfrak{r}F_i$. Il fait référence au résultat de Hurewicz lui permettant d'affirmer cela mais donne aussi une esquisse de preuve où il montre que tout $(i-1)$-cycle est "sphérique", c'est-à-dire l'image simpliciale d'une i-sphère, et parvient à le prolonger en l'image d'une $(i+1)$-boule.

[45] Ce complexe se laisse bien écrire comme une somme de cerfs-volants $(i-1)$-dimensionnels.

Le fait pour P d'être j-asphérique pour tout j, $2 \leq j < i$, se traduit donc par les égalités $R_{k-1} = \mathfrak{r}F_k$, $1 \leq k \leq i$. De plus les cycles de P et de $\tilde{P}$ sont reliés par la relation $S_i(P) = \omega R_i$, où $S_i(P)$ désigne l'ensemble des i-cycles sphériques de P.[46]

A partir de ce point, Freudenthal ne fait plus appel qu'à des raisonnements algébriques. Ayant posé le problème topologique qui l'intéressait et introduit les concepts topologiques nécessaires à son propos, il a identifié les structures algébriques pertinentes pour décrire la situation et traduit en termes de ces structures l'hypothèse cruciale de l'asphéricité via $R_{k-1} = \mathfrak{r}F_k$, $1 \leq k \leq i$. Dès lors, seule l'algèbre intervient pour établir les résultats et la topologie n'est plus perceptible que par le vocabulaire employé (les "cycles", "cerfs-volants", l'"asphéricité", etc.) et lorsque les résultats abstraits sont reformulés dans le cadre pratique qui les a motivés.

Au contraire de Hopf, Freudenthal ne renverse pas l'ordre d'exposition : il part de ce qui motive les investigations, à savoir une situation topologique, et montre progressivement comment la situation peut être décrite en termes de structures abstraites et comment les hypothèses de nature topologiques sont reformulées dans ce cadre-là. Ensuite seulement l'algèbre intervient et, quasiment, s'occupe de tout. La présentation de Freudenthal rend transparentes les motivations de l'introduction de tel ou tel concept abstrait et n'insère aucune rupture dans l'enchaînement des idées. Chez Hopf, il faut se plonger dans la lecture des applications topologiques pour retrouver les raisons de l'introduction initiale de chaque concept abstrait, et encore n'apparaissent-elles pas de manière explicite, et sont donc soumises à interprétation.

Néanmoins, comme cela deviendra encore plus manifeste dans la suite de notre analyse, Hopf se place dans un cadre plus général, ce qui explique aussi en partie pourquoi le rapport à l'intuition est parfois coupé dans son propos.

La prinicipale originalité de Freudenthal consiste en l'introduction de la notion de cerf-volant, absolument absente de ses sources quasi exclusives que semblent être les articles de Hopf et de Hurewicz. Cette notion nous semble être motivée par la volonté de généralisation des objets introduits par Hopf dans l'article de 1942. Nous allons montrer en quoi il nous apparaît que Freudenthal a collé à cet article et s'est efforcé d'en généraliser les idées en dimension supérieure.

Dans [121], Hopf avait basé sa description topologique sur le fait qu'on peut associer à toute 2-chaîne un bord homotopique. Pour ce faire, il avait donné un procédé général associant à toute 2-chaîne élémentaire y_i le che-

[46]Sans la condition d'asphéricité, seule l'inclusion $S_i(P) \subset \omega R_i$ est vraie.

min $\gamma_i \partial y_i \gamma_i^{-1}$ si ∂y_i désigne le lacet, issu d'un des sommets V_i du triangle, correspondant au bord de y_i parcouru une fois dans le sens positif, et γ_i le chemin reliant O à V_i. Les 2-chaînes étant combinaisons linéaires des 2-chaînes élémentaires, il était ensuite facile de conclure qu'à toute 2-chaîne est associée un bord homotopique. Le chemin $\gamma_i \partial y_i \gamma_i^{-1}$ est ce que Hopf avait appelé une "boucle"[47] ("Schleife"). Hopf avait ensuite construit l'isomorphisme $\dfrac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{S}^2} \cong \dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$ en associant à tout 2-cycle $\sum c_i y_i$ le bord homotopique obtenu comme somme de boucles $\sum c_i(\gamma_i \partial y_i \gamma_i^{-1})$. Si l'on se restreint à la dimension 2, un cerf-volant est juste la donnée d'un y_i et d'un γ_i et le bord d'un cerf-volant est une boucle. En munissant l'ensemble des cerfs-volants d'une action de G, Freudenthal constate qu'il revient au même de travailler dans le revêtement universel, et en étendant cette action à celle de $\mathbb{Z}[G]$, on voit que l'application bord envoie cet ensemble exactement sur l'ensemble des bords homotopiques. Hopf avait déterminé que les 2-chaînes dont le bord homotopique est nul sont exactement les "Kugelbilder", c'est-à-dire les images continues d'une sphère, qui forment l'ensemble noté $S_2(P)$ par Freudenthal.

Selon la vision de Freudenthal, la construction de Hopf revient à partir d'un 2-cycle $\sum_k c_2^k t_2^k$, donc un élément de $Z_2(P)$, et à lui associer la combinaison linéaire de cerfs-volants $\sum_k c_2^k d_2^k$, c'est-à-dire un élément de $\omega^{-1} Z_2(P) := \tilde{R}_2$. Prenant le bord $\mathfrak{r}$ de cet élément, on obtient une somme de boucles, donc un bord homotopique. Comme on a $R_1 = \mathfrak{r} F_2$ par simple connexité du revêtement universel $\tilde{P}$, les bords homotopiques sont exactement les éléments de R_1. Le bord homotopique d'un 2-cycle obtenu par ce procédé est également un élément se projetant sur 0 via ω (car $\omega \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \omega$), c'est-à-dire appartenant à ΩF_1. Ainsi l'application construite par Hopf part, selon les notations de Freudenthal, de ce procédé d'affectation d'un élément de $R_1 \cap \Omega F_1$ à un élément de $Z_2(P)$, et de ce que tout élément de $R_1 \cap \Omega F_1$ peut être obtenu ainsi à partir d'un élément de $Z_2(P)$. L'ensemble des "Kugelbilder" de Hopf (i.e. les 2-cycles sphériques), à savoir $S_2(P)$, est précisément le noyau de l'application de Hopf.

L'objet sur lequel se concentre Freudenthal est le quotient $Q_i = Z_i(P)/S_i(P)$, où $Z_i(P)$ désigne l'ensemble des i-cycles de P. Il est normal de chercher à bien comprendre cet objet car, comme nous venons de le revoir, c'est par lui que Hopf était passé, en dimension 2, pour prouver l'isomorphisme $\dfrac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{S}^2} \cong \dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$. La description du quotient $Z_i(P)/S_i(P)$ peut être menée en généralisant à la dimension i la construction précédente. La méthode consiste donc à remonter de $Z_i(P)$ à son image réciproque dans le revêtement universel (ou, ce

[47] Whitney lui, dans [244], le baptise "bord homotopique élémentaire".

qui revient au même, dans l'ensemble des i-cerfs-volants) : ainsi est introduit $\tilde{R}_i := \omega^{-1}Z_i(P)$. Lorsqu'on applique $\mathfrak{r}$ à un élément de $\tilde{R}_i$, on obtient un élément de $R_{i-1} \cap \Omega F_{i-1}$, c'est-à-dire en particulier un élément se projetant sur 0 dans la base. L'hypothèse d'asphéricité en dimension j, $2 \leq j < i$, qui se traduit algébriquement par $R_{i-1} = \mathfrak{r}F_i$, assure qu'un élément de $R_{i-1} \cap \Omega F_{i-1}$ est bien un bord, donc que $\mathfrak{r}\tilde{R}_i = R_{i-1} \cap \Omega F_{i-1}$.

En remontant la projection ω, Freudenthal établit l'isomorphisme[48] :

$$Q_i \simeq \tilde{R}_i/(R_i + \Omega F_i). \tag{1}$$

Et, d'un autre côté, en utilisant le bord comme cela a été décrit juste avant, il aboutit à :

$$Q_i \simeq (R_{i-1} \cap \Omega F_{i-1})/\Omega R_{i-1}. \tag{2}$$

Ce dernier isomorphisme est très proche celui établi par Hopf dans [123], à savoir :

$$\mathfrak{Z}^i/U(Z^i) \simeq (X_0^{i-1} \cap H^{i-1})/H_0^{i-1},\ i \geq 1.$$

C'est, on l'aura compris, l'hypothèse d'asphéricité en dimensions 2 à i qui permet de concilier les deux résultats : en effet, elle dit que l'image par la projection des i-cycles du revêtement universel est exactement l'ensemble $S_i(P)$ des i-cycles sphériques et que les groupes des bords sont les groupes des cycles, i.e. $H^k = Z^k$. Ensuite, c'est juste une histoire de notation, ΩF_{i-1} par exemple, étant le même objet que X_0^{i-1}, Z^k le même que R_k, etc.

Freudenthal a donc établi, en utilisant l'hypothèse d'asphéricité, l'isomorphisme (2) qui coïncide avec celui, plus général, de Hopf, dans le cas où l'asphéricité est supposée. Le résultat de Freudenthal couvre donc un cadre moins large que celui de Hopf mais est établi plus simplement et, de plus, sa méthode lui permet de déterminer un lien direct entre la dimension i dans le revêtement et la dimension i dans la base via l'isomorphisme (1), ce que Hopf n'avait pas. Cela dit, l'information la plus commode est bien celle donnée par l'isomorphisme (2) car dans (1) intervient le groupe $\tilde{R}_i$ qui n'admet pas une description algébrique aussi simple que R_i ou F_i.

Avec (2), Freudenthal explique[49] toucher quasiment au but désiré. Il suffit en effet, pour conclure, d'être capable d'associer à tout groupe fondamental G une suite (F_i) de $\mathbb{Z}[G]$-modules libres, munie d'un morphisme $\mathfrak{r}$ en chaque degré, tel que $R_i = \mathfrak{r}F_{i+1}$. Il prouve, de manière différente de Hopf, que les Q_i sont indépendants de la suite (F_i).[50]

Freudenthal commente ainsi son résultat :

[48] Il suffit de voir, ce qui est de l'algèbre élémentaire, que $\omega^{-1}(S_i(P)) = R_i + \Omega F_i$.
[49] Cf. [87] p. 276.
[50] Il le prouve néanmoins, comme Hopf, via l'isomorphisme (2).

"Rein algebraisch zeigt sich, daß die so bestimmten Q_i von der zufällig Wahl der Folge F_i nicht abhängen, sondern algebraische Invarianten der Ausgangsgruppe G sind.
Das ist derselbe Grundgedanke wie bei Hopf".[51].

Il place ainsi l'indépendance des quotients $(R_{i-1} \cap \Omega F_{i-1})/\Omega R_{i-1}$ en la suite (F_i) dans la droite ligne de l'indépendance, établie par Hopf, de $\dfrac{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$ en la présentation du groupe comme image homomorphe d'un groupe libre $\mathfrak{F}$. La condition $R_i = \mathfrak{r}F_{i+1}$ est ce qui assure que l'indépendance des Q_i se propage de degré en degré.

Si jusque là le texte de Freudenthal présentait la preuve du même résultat que Hopf, il s'éloigne ensuite de manière conséquente des questions abordées par Hopf dans [123]. Là où celui-ci avait donné un procédé théorique algébrique de détermination d'une suite (F_i) – c'est-à-dire, dans le langage de Hopf, une résolution libre – Freudenthal préfère se poser la question de l'existence de polyèdres ayant un groupe fondamental G donné et asphériques jusqu'à une certaine dimension. Il cherche donc un moyen géométrique de déterminer l'homologie d'un groupe quelconque. Il répond en partie au problème mais n'offre cependant pas de grande avancée pratique.

Freudenthal consacre, comme l'avait fait Hopf, une section de son texte au traitement de quelques exemples de détermination des Q_i. Peut-être parce que son essai de détermination de l'homologie des groupes par la voie géométrique s'est révélé plutôt infructueux, Freudenthal ne procède à des calculs de Q_i que par la voie algébrique, construisant dans des cas simples une résolution libre. On se souviendra que Hopf, lui, avait justement eu systématiquement recours aux connaissances de la topologie[52] pour calculer l'homologie des groupes. La confrontation des articles de Hopf et de Freudenthal révèle bien le problème qui se posait à eux : le fait que l'homologie des groupes peut être définie autant topologiquement qu'algébriquement offre deux voies distinctes pour établir des résultats en lien avec cette théorie. Qu'il s'agisse de résultats généraux, comme la possibilité théorique de calculer les groupes d'homologie d'un groupe quelconque, ou de résultats concrets, comme le calcul effectif de groupes d'homologie d'un groupe donné, se pose à chaque fois le problème du choix entre la méthode algébrique et la méthode topologique.

[51]"Il apparaît de manière purement algébrique que les Q_i ainsi déterminés ne dépendent pas du choix admissible de la suite F_i, mais sont des invariants algébriques du groupe G. C'est la même idée fondamentale que chez Hopf". Freudenthal cite alors l'article de 1942 de Hopf.

[52]Ce pouvait être en utilisant des tores r-dimensionnels, des sphères, des espaces de lentilles, etc.

Hopf et Freudenthal ont chacun creusé dans les deux directions et ont tous les deux connu des succès limités. Freudenthal justifie également le fait de ne pas s'étendre sur la considération d'exemples parce qu'il considère qu'il serait plus fructueux d'approfondir la connaissance de l'anneau d'un groupe libre.

Freudenthal a donc retrouvé, indépendamment de Hopf, le même résultat que lui, à savoir l'explicitation du lien algébrique entre le groupe fondamental d'un complexe ou polyèdre asphérique et ses groupes d'homologie. Les similitudes entre le travail de Hopf et celui de Freudenthal sont manifestes et proviennent de ce que Freudenthal s'est très fortement inspiré de l'article de 1942 de Hopf. Ainsi, même si certaines preuves diffèrent, l'utilisation du revêtement universel et de l'action de $\mathbb{Z}[G]$ ainsi que des résolutions libres montrent que les deux mathématiciens tiennent essentiellement le même propos.

Mais nous avons vu également de nombreuses différences entre les travaux de Hopf et de Freudenthal, qui tiennent semble-t-il à deux choses : d'une part le fait que Freudenthal a cherché à exploiter le plus directement et le plus simplement possible l'article de 1942 de Hopf (ce qui en un sens n'est pas autant perceptible chez Hopf lui-même), d'autre part le fait que Hopf a visé plus de généralité. Ce dernier aspect se manifeste par le fait que Hopf a cherché un lien entre revêtement et base sans hypothèse d'asphéricité sur la base[53], lien décrit par l'isomorphisme $\mathfrak{Z}^i/U(Z^i) \simeq (X_0^{i-1} \cap H^{i-1})/H_0^{i-1}$, et par sa volonté de donner au départ une présentation algébrique très abstraite de l'invariance de certains quotients, qui peuvent être interprétés comme des groupes d'homologie sous certaines conditions. Freudenthal n'a, lui, pas visé cela, se concentrant sur la seule question d'une meilleure compréhension du résultat de Hurewicz, sans réellement l'abstraire – en aucun cas Freudenthal ne parle d'homologie d'un groupe, aussi proche en soit-il : le titre de son article est très clair à ce sujet, ce qui l'intéresse est uniquement l'influence du groupe fondamental (d'un polyèdre donc) sur les groupes d'homologie.

La fin de l'article de Freudenthal s'est vue ajoutée deux addenda entre le moment de la soumission et celui de la parution. Le premier, daté du 29 juillet 1945, voit Freudenthal expliquer qu'il a, grâce au rétablissement des communications avec l'étranger, pris connaissance de l'existence de l'article de 1945 de Hopf. Il reconnaît que son travail est similaire à celui de Hopf en ce qu'il établit le même isomorphisme (2) et trouve que Hopf traite le problème de manière plus générale. Il a cependant jugé utile de publier son article en

[53]Ou, ce qui revient au même d'après une proposition de Hurewicz, sans hypothèse d'acyclicité sur le revêtement.

l'état car la preuve de l'invariance des Q_i en la résolution est différente et car, une fois cette invariance établie, la suite de l'article se distingue totalement du travail de Hopf. Celle-ci s'intéresse en effet à la cohomologie, dualisant pour l'essentiel les résultats obtenus sur l'homologie précédemment dans l'article. Nous ne parlons pas de cet aspect de l'article de Freudenthal car allons nous concentrer sur la cohomologie dans la section suivante, via le point de vue plus novateur[54] d'Eckmann.

Le deuxième addendum date, lui, du 9 octobre 1945. Il y explique qu'il vient de recevoir les épreuves d'un article d'Eilenberg et Mac Lane ([70], paru en juillet 1945) qui obtient les mêmes résultats que lui sur l'homologie des groupes. Si le principe lui semble le même, la construction lui apparaît néanmoins très différente ("sehr verschieden"). Nous verrons ceci en détail dans le chapitre suivant.

8.3 Beno Eckmann

Beno Eckmann était un mathématicien suisse (1917-2008). Ayant grandi à Berne, il partit pour Zürich à 18 ans afin d'étudier les mathématiques à l'ETH (Eidgenössische Technische Hochschule). Il y fut pris en charge par plusieurs mathématiciens de renom, comme Plancherel, Gonseth, Stiefel, Polya, Pauli et Hopf, avec qui il semble avoir décidé très tôt de travailler[55]. Il réalisa donc sa thèse sous sa direction, sur les groupes d'homotopie. Une fois celle-ci accomplie, il fut engagé à Lausanne, en 1942.

Il est décrit ainsi par Peter Hilton[56] :

"Eckmann is not a professional categorist ; on the other hand the unqualified benefit of a categorical point of view has been clear to him from his earliest work on group cohomology in 1945, and he has moreover encouraged the development, and the broadening and deepening, of this point of view by inviting to the research institute here in Zurich active exponents of it. Eckmann achieves clarification primarily by the limpid style of his writing. In both his writing and his lecturing, he follows in the footsteps of his own great teacher Heinz Hopf and himself constitutes a model for his many students."

L'influence de Hopf sur Eckmann est évidente et se manifeste au niveau des thèmes mathématiques étudiés, des méthodes ainsi qu'à celui du style.

[54] Contrairement à Freudenthal, Eckmann définit explicitement la cohomologie des groupes. En outre il introduit la notion d'anneau de cohomologie ainsi qu'un complexe abstrait associé à un groupe.

[55] Cf. [187] p. 31.

[56] Cf. [111] p. 192.

Comme nous allons le voir, il reste dans son article [59] dans la droite ligne du travail de Hopf, notamment celui sur l'homologie des groupes, utilisant fortement par exemple le lien entre un complexe et ses revêtements (là où celui-ci n'est pas explicite chez Eilenberg et Mac Lane, à compter qu'ils l'aient même considéré) et cherchant l'abstraction et la généralité dans sa présentation ainsi que dans ses méthodes (il relève régulièrement les propriétés qui seront qualifiées plus tard de "fonctorielles" des applications qu'il considère), de manière peut-être encore plus systématique que Hopf.

En parlant de l'article [59] de Beno Eckmann ici, nous réalisons une entorse à la chronologie que nous essayons de respecter dans ce mémoire. A vrai dire nous avons déjà commencé cette entorse en évoquant l'article de Freudenthal avant l'article [70] d'Eilenberg et Mac Lane et, d'une certaine façon c'était également le cas en commençant par présenter l'article de Hopf de 1945 car les tous premiers développements, certes brefs, d'Eilenberg et Mac Lane en réaction à l'article de 1942 de Hopf remontent à 1943 avec [69].

Cette inversion chronologique n'est en soi pas préjudiciable car, comme nous l'avons déjà dit, les diverses contributions que nous étudions ont été réalisées de manière indépendante (c'est le cas également de l'article d'Eckmann bien que ce dernier ait, au contraire des autres, eu connaissance de l'article de 1945 de Hopf). Elle est d'autant plus bénigne dans les cas de Hopf et de Freudenthal que leurs méthodes sont éloignées de celles d'Eilenberg et Mac Lane. Mais ce n'est pas totalement le cas du papier d'Eckmann qui, sur plusieurs points, recoupe ceux d'Eilenberg et Mac Lane. Nous allons donc d'une certaine manière anticiper sur l'analyse des contributions d'Eilenberg et Mac Lane au développement de l'homologie et de la cohomologie des groupes mais, étant donné l'importance de leur rôle, il nous a semblé devoir être traité à part, en un chapitre indépendant.

Si Eckmann cite à plusieurs reprises dans [59] la théorie de l'homologie singulière d'Eilenberg ([65] paru en 1944 dans la revue *Annals of Mathematics*), dont il s'est donc inspiré, il ne mentionne à aucun moment les articles [69] et [70] d'Eilenberg et Mac Lane, alors que [59] fut soumis le 4 décembre 1945, soit à une date postérieure à la parution des contributions d'Eilenberg et Mac Lane. Leurs développement respectifs semble donc s'être conçus indépendamment, la guerre, rendant chaotique la réception des revues, devant expliquer cette apparente anomalie. Mais il est important d'avoir en tête cette indépendance entre leurs réflexions respectives car leurs contributions partagent néanmoins plusieurs points communs importants, révélateurs de l'orientation donnée par les travaux de Hopf et de la prépondérance de certaines questions qu'ils ont pu inspirer.

Eckmann retrace en introduction un bref historique de la compréhension de l'influence du groupe fondamental sur l'homologie, citant principalement les contributions de Hopf. Il se place ainsi clairement dans la lignée de ce dernier et annonce que son travail sera, entre autres, le pendant de celui de Hopf dans le cadre de la cohomologie. De même que Hopf, il ne vise pas uniquement à établir une dépendance de certains objets en le groupe fondamental ; il entend bien expliquer de quelle façon cette dépendance opère.

La première partie de l'article d'Eckmann s'occupe de la définition de la cohomologie d'un groupe quelconque – chose, si l'on omet l'article [70] d'Eilenberg et Mac Lane, nouvelle. Ainsi, à un groupe (multiplicatif) $\mathfrak{G}$ et un groupe abélien (additif) J – qui pourra éventuellement être muni plus tard d'une structure d'anneau – on peut associer des groupes $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$, $n \in \mathbb{N}$, appelés groupes de cohomologie de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans J. Pour ce faire, Eckmann définit d'abord les "n-fonctions", qui sont simplement des fonctions de n-uplets d'éléments de $\mathfrak{G}$, à valeurs dans J. L'ensemble des n-fonctions forme un groupe abélien noté $L^n(\mathfrak{G}, J)$. Eckmann introduit ensuite le "cobord" δf^n d'une n-fonction f^n, qui est une $(n+1)$-fonction définie par :

$$(\delta f^n)(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = f^n(x_1^{-1}x_2, ..., x_1^{-1}x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i f^n(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_{n+1}).^{57}$$

L'application δ est un morphisme de L^n dans L^{n+1}, d'image notée H^{n+1} et de noyau noté Z^n. Les éléments de H^{n+1} sont appelés $(n+1)$-cobords et les éléments de Z^n n-cocycles. Le vocabulaire employé est bien entendu calqué sur celui de la cohomologie des complexes.

La définition précédente de cobord ne couvre pas le degré 0. Une 0-fonction n'est finalement rien d'autre qu'un élément de J et Eckmann impose que le cobord d'une 0-fonction soit toujours nul. Ainsi $L^0 = Z^0 = J$ et $H^1 = 0$. De plus Eckmann choisit de poser $H^0 = 0$.

Le cobord vérifie la relation $\delta\delta = 0$. Ainsi H^n est un sous-groupe de Z^n, distingué car L^n est abélien. On peut donc former en chaque degré le quotient Z^n/H^n qui est ce qu'Eckmann appelle le n-ième groupe de cohomologie de $\mathfrak{G}$ par rapport[58] à J, et note $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$. En degré 0, $\Gamma^0(\mathfrak{G}, J)$ s'identifie à J.

Immédiatement après avoir défini la cohomologie des groupes, Eckmann donne une interprétation algébrique des groupes de cohomologie en dimensions 1 et 2. Si f^1 est un cocycle alors $\delta f^1(x, y) = f^1(x^{-1}y) - f^1(y) + f^1(x) = 0$ pour tous $x, y \in \mathfrak{G}$, ce signifie que f^1 est un morphisme de $\mathfrak{G}$ dans J. Comme $H^1 = 0$, $\Gamma^1(\mathfrak{G}, J) = Z^1$: le groupe $\Gamma^1(\mathfrak{G}, J)$ est isomorphe au groupe des morphismes de $\mathfrak{G}$ dans J.

[57] Lorsqu'un terme est surmonté d'un chapeau, il faut comprendre qu'il est absent.

[58] Nous dirons plutôt "à coefficients dans J".

Un 2-cocycle est une fonction f^2 vérifiant la relation $f^2(x,y)+f^2(y,z) = f^2(x^{-1}y, x^{-1}z)+f^2(x,z)$. A tout 2-cocycle on peut associer une fonction φ^2, définie par $\varphi^2(u,v) = f^2(u,uv)$, vérifiant la relation $\varphi^2(u,v) + \varphi^2(u,vw) = \varphi^2(v,w)+\varphi^2(uv,w)$. Une telle fonction φ^2 est appelée "système de facteurs"[59] ("Faktorsystemen") par Eckmann ; il indique reprendre ainsi la terminologie du traité [247] de Zassenhaus. La terminologie était déjà devenue classique dans le cadre des systèmes hypercomplexes du fait de son usage par Hasse et Noether notamment. Zassenhaus l'introduit, lui, en lien avec la théorie des extensions de groupes, dont il attribue la paternité à Schreier. Ainsi, en montrant que l'application envoyant un cocyle f^2 sur un système de facteurs φ^2 est un morphisme inversible, Eckmann établit-il un isomorphisme entre Z^2 et le groupe Φ^2 des systèmes de facteurs de $\mathfrak{G}$ dans J. En prouvant en outre que deux systèmes de facteurs associés diffèrent précisément d'un élément correspondant à un 2-cobord via l'isomorphisme précédent, il obtient finalement un isomorphisme entre $\Gamma^2(\mathfrak{G}, J)$ et le groupe des classes d'équivalences de systèmes de facteurs, dont Schreier avait prouvé qu'il était isomorphe au groupe des extensions centrales de J par $\mathfrak{G}$.

Eckmann se pose bien sûr la question d'un prolongement de ce résultat en dimension supérieure. Il propose une généralisation de la notion de système de facteurs en définissant un n-système de facteurs comme une fonction φ^n vérifiant la relation :

$$\varphi^n(u_2, u_3, ..., u_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi^n(u_1, ..., u_{i-1}, u_iu_{i+1}, u_{i+2}, ..., u_{n+1})$$

$$+(-1)^{n+1}\varphi^n(u_1, u_2, ..., u_n) = 0.$$

De même qu'en degré 2, il y a un isomorphisme entre Z^n et le groupe des n-systèmes de facteurs. Mais sa généralisation de la notion de système de facteurs n'offre pas d'avancée car Eckmann n'a pas connaissance d'une interprétation simple des n-systèmes de facteurs dans le cadre de la théorie des groupes. Il peut uniquement faire référence au travail de Teichmüller sur les algèbres associatives[60], sans aller plus loin.

Le mathématicien suisse en vient ensuite, lorsque J est un anneau, à définir un produit entre une n-fonction f^n et une k-fonction g^k quelconques,

[59]Pour la terminologie concernant les systèmes de facteurs et les extensions de groupes, on pourra se référer au chapitre sur la codification des extensions de groupes par Schreier.

[60]Il cite [220] ainsi que l'article [246] de Witt. Celui-ci traite des systèmes de facteurs apparaissant dans le cadre d'une extension galoisienne mais ne dépasse pas le degré 2. Teichmüller, par contre, a offert une interprétation des 3-systèmes de facteurs en lien avec les algèbres associatives, cf. [220].

pour tous k et n. Le produit $(f^n \cup g^k)$ est une $(n+k)$-fonction définie par :

$$(f^n \cup g^k)(x_1, x_2, ..., x_{n+k}) = f^n(x_1, x_2, ..., x_n) g^k(x_n^{-1} x_{n+1}, x_n^{-1} x_{n+2}, ..., x_n^{-1} x_{n+k}),$$

si $n > 0$ et $k > 0$, et :

$$(f^n \cup g^0)(x_1, x_2, ..., x_n) = f^n(x_1, x_2, ..., x_n) g^0,$$

$$(f^0 \cup g^k)(x_1, x_2, ..., x_k) = f^0 g^k(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Si J est unitaire alors la 0-fonction $f^0 = 1$ joue le rôle de neutre pour le produit $\cup$. Quelques calculs permettent de prouver que ce produit est associatif, et qu'il se comporte vis-à-vis du cobord ainsi :

$$\delta(f^n \cup g^k) = (\delta f^n \cup g^k) + (-1)^n (f^n \cup \delta g^k).$$

Cette formule permet d'établir les règles :

cocycle $\cup$ cocycle = cocycle,
cocycle $\cup$ cobord = cobord,
cobord $\cup$ cocycle = cobord,

grâce auxquelles il devient clair que la classe de cohomologie du cocycle $f^n \cup g^k$ est uniquement déterminée par les classes de cohomologie du cocycle f^n et du cocycle g^k. Ainsi $\cup$ est-il un produit associatif et distributif de $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J) \times \Gamma^k(\mathfrak{G}, J)$ dans $\Gamma^{n+k}(\mathfrak{G}, J)$, ce qui se synthétise de la manière suivante[61] :

Si J est un anneau unitaire, le produit $\cup$ permet de faire de la somme directe des groupes de cohomologie $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$, $n \in \mathbb{N}$, un anneau $P(\mathfrak{G}, J)$, appelé "anneau de cohomologie[62] de $\mathfrak{G}$ par rapport à J".

L'anneau de cohomologie est la principale nouveauté dans ce travail d'Eckmann. Nous allons en voir d'autres, mais qui avaient déjà été exposées peu avant par Eilenberg et Mac Lane (indépendamment, faut-il le rappeler). En ce qui concerne les produits, Eckmann reprend essentiellement la présentation qu'en fait Eilenberg en lien avec l'homologie singulière. Pour le reste, il adapte à la cohomologie et développe pour une bonne part les idées de Hopf sur l'homologie des groupes.

Dans la deuxième partie de son article, Eckmann se consacre aux complexes abstraits et à leurs revêtements. Il emprunte à Eilenberg ([65]) le cadre des complexes de bord fini ("Rand-endlich Komplex") et l'axiomatique

[61] Cf. [59] p. 242.
[62] "Cohomologiering".

des produits $\cup$ dans ce genre de complexes. Il revient sur la cohomologie des complexes, les notations indiquant clairement l'analogie existante avec la cohomologie des groupes définie juste avant, les pendants dans le cadre des complexes des objets introduits pour les groupes étant désignés par les mêmes lettres, mais en caractère gothique. Il définit une n-fonction, pour un complexe de bord fini K cette fois, comme une fonction associant à toute n-cellule c^n un élément du groupe abélien J. L'ensemble des n-fonctions est désigné par $L^n(K,J)$. Le cobord[63] δf^{n-1} d'une fonction de $L^{n-1}(K,J)$ est défini par $\delta f^{n-1}(c^n) = f^{n-1}(\partial c^n)$, pour toute n-cellule c^n, si ∂ est le bord sur K. Le cobord δ est un morphisme de $L^{n-1}(K,J)$ dans $L^n(K,J)$ d'image notée H^n et de noyau noté Z^{n-1}. Les groupes de cohomologie $B^n(K,J)$ de K à coefficients dans J sont définis comme les quotients Z^n/H^n.

De même qu'Eilenberg, Eckmann précise comment définir un produit $\cup$ pour les complexes simpliciaux et met en valeur le concept d'"Homologie-Abbildung" ("chain transformation" dans le vocabulaire d'Eilenberg), qui désigne un morphisme (dimension par dimension) entre complexes, commutant à l'application bord[64].

Il transpose également à la cohomologie l'idée présente chez Hopf de considérer le revêtement d'un complexe. En dualisant pour l'essentiel les raisonnements de Hopf[65], il retrouve les mêmes résultats en cohomologie, donc établit un lien entre la cohomologie du complexe base et la cohomologie du complexe revêtement.

La troisième partie de son article contient l'idée phare partagée avec Eilenberg et Mac Lane, qui consiste à associer un complexe abstrait de bord fini à un groupe quelconque $\mathfrak{G}$. Les résolutions libres de Hopf s'approchaient de cette idée mais elles étaient restées abstraites et générales, ne proposant pas

[63] Il vérifie bien $\delta\delta = 0$.

[64] Cf. les propos d'Eckmann dans [187] p. 33 : "it seems not to be widely known that Heinz Hopf was the first person to construct a free resolution over a group ring. People don't know that ; they talk about Eilenberg-McLane but it was Heinz Hopf who invented free resolutions. He also phrased precisely what it means that two free resolutions are equivalent. I carried this line of thought further on." L'utilisation systématique des "Homologie Abbildung" et de leur propriété d'induire un morphisme en homologie (le morphisme dual induisant, lui, un morphisme en cohomologie) est un des indices du prolongement par Eckmann des idées de Hopf à l'œuvre pour montrer que deux résolutions sont équivalentes.

[65] Le dual d'un morphisme de complexes $V : K_1 \to K_2$, c'est-à-dire la donnée d'un morphismes entre les groupes des chaînes en toute dimension, est la donnée d'un morphisme entre entre les groupes de cochaînes en toute dimension, défini par :

$$V^* f^m = f^m \circ V,$$

si f^m est une m-fonction de K_2.

une manière spécifique d'associer un complexe abstrait à un groupe. Il s'agit également d'une méthode se posant en alternative, avec succès, à celle consistant à déterminer un polyèdre associé à un groupe donné afin de calculer sur le polyèdre l'homologie, voire la cohomologie, du groupe.

Eckmann procède ainsi : étant donné un groupe $\mathfrak{G}$ il définit, pour tout $n \geq 1$, les n-cellules de son futur complexe $K_{\mathfrak{G}}$ comme étant les systèmes ordonnés $c^n = (x_1, x_2, ..., x_n)$, les x_i parcourant tous les éléments de $\mathfrak{G}$. Il existe une et une seule 0-cellule c^0 (le système vide) et une application bord[66] ∂ est définie via :

$$\partial c^n = \partial(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1^{-1}x_2, ..., x_1^{-1}x_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(x_i, ..., \hat{x}_i, ..., x_n),$$

pour $n \geq 2$, et $\partial c^0 = 0$ et $\partial c^1 = 0$ pour toute 1-cellule.

Une n-fonction peut être interprétée comme une application de source l'ensemble des n-cellules $K_{\mathfrak{G}}$ et les définitions ont été prises de sorte que :

$$\delta f^n(c^{n+1}) = f^n(\partial c^{n+1}).$$

Il en résulte immédiatement l'égalité :

$$\Gamma^n(\mathfrak{G}, J) = B^n(K_{\mathfrak{G}}, J),$$

c'est-à-dire que la cohomologie du complexe $K_{\mathfrak{G}}$ coïncide avec la cohomologie de $\mathfrak{G}$. Le produit $\cup$, défini comme plus haut, permet de faire de la somme directe des $B^n(K_{\mathfrak{G}}, J)$ un anneau qui coïncide avec l'anneau de cohomologie $P(\mathfrak{G}, J)$ du groupe.

Mais Eckmann ne s'arrête pas au complexe $K_{\mathfrak{G}}$. Il définit un autre complexe, $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$, qui a la propriété remarquable d'être un revêtement de $K_{\mathfrak{G}}$ de groupe d'automorphismes isomorphe à $\mathfrak{G}$, et d'être acyclique. Il s'obtient très simplement en prenant pour n-cellules les ensembles ordonnés $\bar{c}^n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $n+1$ éléments de $\mathfrak{G}$ et en définissant le bord ∂ par :

$$\partial\bar{c}^n = \partial\{x_0, x_1, ..., x_n\} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\{x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_n\}.$$

On peut également définir un produit $\cup$ dans $K_{\mathfrak{G}}$.

Le fait que $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$ est un revêtement de $K_{\mathfrak{G}}$ se voit de la manière suivante. On peut définir une action de $\mathfrak{G}$ sur $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$ via $x\bar{c}^n = x\{x_0, x_1, ..., x_n\} = \{xx_0, xx_1, ..., xx_n\}$ pour x quelconque dans $\mathfrak{G}$. Chaque élément de $\mathfrak{G}$ induit

[66]Elle vérifie bien $\partial\partial = 0$.

un automorphisme de $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$ et cette action est bien libre. Chaque orbite de $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$ sous $\mathfrak{G}$ possède un seul élément de la forme $\{e, x_1, ..., x_n\}$. Eckmann définit une application U de $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$ dans $K_{\mathfrak{G}}$ en associant à toute orbite la n-cellule $(x_1, ..., x_n)$ de $K_{\mathfrak{G}}$. On pouvait s'interroger sur la définition du bord imposée dans $K_{\mathfrak{G}}$ mais on peut vérifier qu'elle est prise de sorte que soit vérifié $U\partial = \partial U$.

La quatrième et dernière partie de l'article d'Eckmann combine les différents objets introduits jusque là afin d'expliciter le lien entre la cohomologie d'un complexe de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ et la cohomologie de $\mathfrak{G}$. L'analogue en cohomologie du résultat de Hurewicz-Hopf est établi, à savoir[67] :

Si $\bar{K}$ et $\bar{K}_1$ sont des revêtements réguliers des complexes K et K_1 respectivement, associés au même groupe d'automorphismes, et si $\bar{K}$ et $\bar{K}_1$ sont acycliques en dimensions $0, 1, ..., N-1$ $(N \geq 1)$ relativement à un anneau unitaire J, alors :

$$B^n(K, J) \simeq B^n(K_1, J),\ n = 1, 2, ..., N-1.$$

En appliquant cette proposition avec $K_1 = K_{\mathfrak{G}}$, on obtient :

Si le complexe K de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ possède un revêtement régulier $\bar{K}$ associé à $\mathfrak{G}$, et si $\bar{K}$ est acyclique en dimensions $0, 1, ..., N-1$ $(N \geq 1)$ relativement à un anneau unitaire J, alors :

$$B^n(K, J) \simeq \Gamma^n(K, J),\ n = 1, 2, ..., N-1.$$

Dans le cas d'un complexe simplicial, pour lequel un produit $\cup$ est bien défini, on peut également, sous les hypothèses de la proposition précédente, montrer que la somme directe des groupes de cohomologie[68] en dimensions 0 à N de K est isomorphe à la somme directe des groupes de cohomologie en dimensions 0 à N de $\mathfrak{G}$.

Le travail d'Eckmann reprend donc pour une bonne part les méthodes proposées par Hopf en 1942 et 1943. Il rejoint également ce maître et ami dans le souci de généralité observé et par cette même volonté de présenter d'abord les résultats dans un cadre général algébrique avant d'en donner l'interprétation topologique. Lui aussi épure ses démonstrations de l'intuition

[67] Satz I p. 265.

[68] Plus précisément, il s'agit de l'anneau de cohomologie de K dans lequel tous les éléments de dimension strictement supérieure à N sont pris égaux à 0.

géométrique sous-jacente (il ne s'agit d'ailleurs pas d'une volonté qui s'exprime uniquement dans la présentation des résultats car elle opère d'abord dans les méthodes de démonstration elles-mêmes) et met constamment en avant la formulation algébrique des concepts et résultats, sans atteindre toutefois le niveau d'Eilenberg et Mac Lane, qui utilisaient en outre les flèches et les diagrammes, ce qui allégeait encore leur présentation.

La topologie n'intervient finalement qu'en toute fin de l'article d'Eckmann, lorsqu'il s'agit de donner des exemples simples de calcul des groupes de cohomologie de certains groupes. Bien que deux méthodes soient indiquées par le mathématicien suisse, la méthode algébrique utilisant le complexe $K_{\mathfrak{G}}$ et la méthode géométrique utilisant des polyèdres de groupe fondamental $\mathfrak{G}$, seule la seconde est utilisée. Ceci montre bien que le complexe $K_{\mathfrak{G}}$ est avant tout un outil théorique, remarquable en ce qu'il permet potentiellement non seulement de calculer la cohomologie d'un groupe mais aussi son homologie[69]. On peut également remarquer que $K_{\mathfrak{G}}$ peut être vu comme une résolution libre[70] ; il s'agit d'une résolution canonique en ce qu'elle est valable quel que soit le groupe $K_{\mathfrak{G}}$ (et les relations vérifiées par les éléments de $\mathfrak{G}$).

Le fait de chercher à associer un complexe abstrait à un groupe donné est une idée féconde et un but légitime dès lors qu'on a réalisé que les connaissances topologiques du moment offrent des perspectives limitées à la recherche d'un polyèdre de groupe fondamental un groupe donné. Eckmann peut avoir été encouragé à chercher un complexe tel que $K_{\mathfrak{G}}$ par la considération de l'article [65] d'Eilenberg, où ce dernier introduit plusieurs complexes abstraits afin de prouver que l'homologie et la cohomologie du complexe singulier d'un polyèdre sont les mêmes que celles du complexe simplicial résultant d'une décomposition simpliciale du polyèdre. Pour ce qui est de la méthode d'obtention de $K_{\mathfrak{G}}$, on voit bien qu'il exploite le fait mis en lumière par Hopf que si un complexe de groupe fondamental $\mathfrak{G}$ possède un revêtement universel acyclique alors son homologie est la même que celle de $\mathfrak{G}$. Il est donc probablement parti du complexe $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$, dont les n-cellules consistent en les ensembles ordonnés $\bar{c}^n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $n+1$ éléments de $\mathfrak{G}$, ce qui copie le cas classique des complexes simpliciaux où les n-simplexes sont déterminés par la donnée de $n+1$ sommets. Le bord est défini sur $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$ de manière analogue à celui des complexes sipliciaux. Une fois ce complexe introduit, la définition de $K_{\mathfrak{G}}$ peut s'obtenir par conditions nécessaires en exprimant le fait que $\bar{K}_{\mathfrak{G}}$ doit être un revêtement régulier de groupe $\mathfrak{G}$ de $K_{\mathfrak{G}}$ et en imposant que la projection U vérifie $U\partial = \partial U$.

Le but d'Eckmann était vraisemblablement de créer le pendant cohomo-

[69]Cf. [59] p. 268.

[70]Ce n'est cependant pas un aspect indiqué par Eckmann.

logie de l'article de 1942 de Hopf. Il est d'autant plus justifié de s'intéresser à la cohomologie qu'elle présente plus de structure que l'homologie, vu qu'un produit peut être défini : le résultat mis en avant par Eckmann dans le titre de son article est d'ailleurs la définition d'un *anneau de cohomologie* d'un groupe quelconque. Ainsi, il ne se contente pas de transférer la notion de cohomologie de la topologie aux groupes, il donne également le pendant algébrique du produit "cup". Ce faisant, sa volonté (déjà présente chez Hopf) d'aller au-delà de la simple dépendance des groupes de cohomologie de complexes soumis à certaines conditions[71] en le groupe fondamental, en explicitant algébriquement le lien entre groupe fondamental et groupes de cohomologie, s'est concrétisée par l'introduction d'un complexe abstrait[72] associé à un groupe $\mathfrak{G}$ qui présente les mêmes informations homologiques et cohomologiques que $\mathfrak{G}$.

Les contributions de Hopf, de Freudenthal et enfin d'Eckmann marquent clairement la naissance de l'homologie et de la cohomologie des groupes, bien qu'il en manque encore des applications concrètes pour confirmer l'intérêt de ces théories et en pérenniser l'étude. D'un point de vue théorique, on peut voir poindre deux questions dans le travail d'Eckmann. D'une part, concernant la topologie, comment étendre ces théories qui se sont notamment créées autour du lien entre homologie d'un groupe et homologie d'un complexe simplicial, à des espaces plus généraux et d'autre part, concernant la théorie des groupes, quelles interprétations peut-on donner à la cohomologie en dimension supérieure à 2 ? La première question se voit apporter une réponse par l'homologie singulière d'Eilenberg[73] tandis que la seconde se voit satisfaite en dimension 3 par des considérations provenant de la théorie des algèbres associatives. Le prochain chapitre, consacré à Eilenberg et Mac Lane, développera ces points.

[71]En l'occurrence l'acyclicité dans le revêtement universel ou l'asphéricité dans le complexe base.

[72]Cette idée s'est d'ailleurs développée et s'est cristallisée dans les cours classiques en la résolution bar notamment.

[73]Ce qu'Eckmann avait d'ailleurs senti, cf. l'introduction de [59] p. 235 : "Der Übergang zur singulären Homologietheorie dürfte es gestatten, die Resultate dieser Arbeit auf allgemeinere Räume zu übertragen."

Chapitre 9

Eilenberg et Mac Lane

9.1 Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane

Samuel Eilenberg[1] est né en Pologne, à Varsovie, en 1913, et s'est éteint à New York en 1998. Il fut un étudiant de Karol Borsuk à l'Université de Varsovie et fit donc un temps partie de la célèbre école polonaise de topologie (qui compta comme représentants Banach, Borsuk, Hahn, Kuratowski, Sierpiński, etc.) qui avait vu se révéler peu avant lui Witold Hurewicz. Sa thèse concernait la topologie du plan et fut, par l'intermédiaire de sa publication dans la revue *Fundamenta Mathematica*[2], bien accueillie en Pologne ainsi qu'aux Etats-Unis. Eilenberg a semble-t-il rapidement intégré un traitement algébrique à sa topologie ; c'est en tout cas le jugement de Mac Lane au vu d'un de ses articles [61], paru en 1939, où il étudiait le lien entre groupe fondamental et homotopie supérieure[3]. Surtout, Mac Lane met en avant la capacité d'Eilenberg à clarifier une somme confuse de contributions à un même sujet, comme il l'a fait par exemple pour l'homologie singulière[4] dont il a su donner un traitement clair et achevé[5].

Dès la fin des années 1930, Eilenberg apparaît manifestement comme

[1]Les informations que nous reproduisons ici sont essentiellement tirées de [18] et [134].

[2]Cf. [60] ; le texte est en français.

[3]Cf. les mots de Mac Lane à ce sujet, dans [18] : "Algebra was not foreign to his topology !"

[4]Nous étudions ce point plus loin dans le chapitre.

[5]Mac Lane voit cette aptitude comme un "style". Il semble ainsi signifier que la capacité de clarification d'Eilenberg se ressent également dans sa méthode d'investigation et dans sa manière de rédiger un article. Cf. [150] p. 134 : "This paper ([64]) is a fine example of Sammy's influence and style – the same style is also exhibited in his 1944 paper on "Singular Homology", in which he carved out (from confusing discussions in various texts about oriented simplices and changes of signs) the clear and direct definition of the singular complex. This is the definition which we still use."

un spécialiste de topologie, avec un rythme élevé de production. Il publia régulièrement dans la revue polonaise *Fundamenta Mathematica* et, dès son arrivée aux Etats-Unis, dans les revues américaines les plus prestigieuses. Il avait même déjà été publié dans les *Annals of Mathematics* alors qu'il était encore en Pologne et, à cette période, ses travaux étaient également reconnus en France, via des parutions dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. On le trouve à cette époque travaillant sur divers thèmes de topologie, de la théorie de la dimension aux théorèmes de dualité, en passant par l'homotopie supérieure et la cohomologie naissantes.

Il quitta la Pologne en 1939, sur les conseils de son père alarmé par la dégradation de la situation du pays. Il gagna les Etats-Unis en avril et commença par se rendre à Princeton, de même que l'avait fait son compatriote Hurewicz en 1936. A Princeton, Veblen et Lefschetz s'efforçaient de trouver des postes aux mathématiciens réfugiés ; ils lui en obtinrent un à l'Université du Michigan. Il s'y trouvait une équipe de topologie dynamique, récemment renforcée par l'arrivée de Norman Steenrod[6].

Saunders Mac Lane fut justement invité à s'exprimer dans le cadre des "cours Alexander Ziwet" de l'Université du Michigan en 1941. Eilenberg fut un membre assidu de ses exposés mais, ne pouvant assister à son dernier cours, il lui demanda de lui en expliquer le contenu[7] à l'avance. Cet épisode marqua le début d'une collaboration très fructueuse[8].

Saunders Mac Lane[9] était un mathématicien américain (1909-2005). Diplômé de l'Université de Yale en 1929, il fut attiré à l'Université de Chicago, notamment par une proposition de "fellowship" de son Président. Il fut plutôt déçu de cette expérience, essentiellement car il ne vit aucun mathématicien disponible pour encadrer la thèse de logique qu'il souhaitait réaliser. Il fit une demande de bourse pour étudier en Allemagne, et l'obtint. C'est ainsi qu'il partit pour Göttingen en 1931, lieu idéal pour travailler en logique, avec David Hilbert (certes retraité), Hermann Weyl ou Paul Bernays notamment.

[6]Cf. les propos de Mac Lane dans [18] p. 1346 : "Sammy's work in topology was well known, so a position for him was found at the University of Michigan. There Ray Wilder had an active group of Topologists, including Norman Steenrod, then a recent Princeton Ph.D. Sammy immediately fitted in, did collaborative research (for example, with Wilder, O.G. Harrold and Dean Montgomery)."

[7]Cf. [153] p. 30.

[8]Nous allons bien sûr en parler par la suite. Que le lecteur soit néanmoins déjà informé de ce que les articles écrits en commun par Eilenberg et Mac Lane, au nombre de quinze, ont été réunis en un volume spécial [74], ce qui peut donner une idée de l'importance de leur collaboration.

[9]Concernant Mac Lane, la plupart des informations proviennent de son autobiographie, cf. [155].

Comme nous l'avons déjà mentionné, Göttingen était probablement le plus grand centre mathématique de l'époque. Mac Lane eut donc l'occasion de découvrir toutes sortes de mathématiques, entre les mains des mathématiciens les plus compétents. Il put également juger de l'émergence de l'Algèbre Moderne. Un petit exemple qu'il nous donne à la page 50 de [155] traduit bien la différence entre ce qui se faisait à Göttingen en algèbre, et ce qui s'y faisait à Chicago par exemple. A Chicago, un vecteur dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n était un n-uplet de réels ; à Göttingen, un vecteur était une flèche et un espace vectoriel un ensemble d'objets appelés vecteurs, obéissant à des règles d'addition et de multiplication par un scalaire...

Mais l'effervescence intellectuelle de Göttingen ne se limitait pas aux mathématiques, la logique, la physique et la philosophie notamment y étant également très vivantes, ce qui explique que le séjour de Mac Lane à Göttingen eut une grande influence dans son développement en tant qu'homme de science. Colin McLarty, dans [162] et [164], analyse l'influence de la vie philosophique et mathématique de Göttingen entre 1931 et 1933 sur les mathématiques de Mac Lane, et leur philosophie sous-jacente. Dans [164], il donne quelques précisions sur la pensée de Geiger et de Weyl, que Mac Lane a spécifiquement étudiés à cette époque. Il apparaît que Mac Lane fut sensible à la philosophie de Hilbert, en particulier à l'idée que le formalisme n'opérait pas nécessairement une réduction des mathématiques à un jeu de signes, mais pouvait au contraire apporter beaucoup à leur compréhension s'il était utilisé au plus près de la pratique, et en accord avec elle.

Cela dit, les racines des conceptions mathématiques et philosophiques de Mac Lane ne peuvent être réduites à Göttingen. McLarty ([162] p. 238-9) présente l'influence de E. H. Moore comme une composante non négligeable de la personnalité de Mac Lane. Le principe suivant de Moore (cf. [168] p. 98), rapporté par McLarty :

> "the existence of analogies between central features of various theories implies the existence of a general abstract theory which underlies the particular theories and unifies them with respect to those central features"

est assurément un principe auquel Mac Lane a adhéré et qui trouve son expression dans la formation de la théorie des catégories et, ce qui nous concerne plus, de la cohomologie des groupes.

Mac Lane mit le point final à sa thèse en 1933. Celle-ci n'eut pas un grand succès mais il faut admettre que la logique mathématique n'était pas une discipline encore bien reconnue par les mathématiciens. Ainsi Mac Lane décida par la suite de plutôt se consacrer à l'algèbre, renforcé dans ce domaine par son expérience des mathématiques allemandes.

De retour à Yale, il commença par travailler à la théorie de la valuation dans le cadre de la théorie algébrique des nombres. L'année suivante il prit un poste à Harvard et s'attela notamment à un cours d'algèbre en s'inspirant de l'approche de Noether et van der Waerden. Il y fit également la connaissance de Hassler Whitney qui travaillait alors sur le problème des quatre couleurs. Mac Lane fut intéressé par les résultats de Whitney et réfléchit également au problème. C'est ainsi qu'il se mit à étudier un domaine des mathématiques auquel il n'avait jusque là que peu touché, la topologie, et il en apprit semble-t-il beaucoup auprès de Whitney.

Après être passé par Cornell et Chicago de nouveau, Mac Lane revint à Harvard en 1938. Il y élabora avec Garrett Birkhoff un traité d'algèbre[10] qui, selon lui, fut le premier traité américain destiné au premier cycle universitaire, adoptant complètement le point de vue de l'Algèbre Moderne.

Trouvant qu'il lui manquait des connaissances plus étendues en mathématiques, susceptibles de lui ouvrir de nouveaux champs de recherche, Mac Lane se dit qu'il lui serait profitable de travailler en collaboration avec d'autres mathématiciens. En se rendant à la Conférence de topologie de l'Université du Michigan[11], Mac Lane se rendit compte qu'il était certainement prêt à travailler en collaboration dans ce domaine.

Il s'était en fait déjà lancé dans une collaboration – qui s'étendit de 1938 à 1941 – avec Otto Schilling, mais en théorie algébrique des nombres. Schilling et lui tentèrent ensemble d'étendre la théorie du corps de classes aux extension normales de corps de nombres (cf. [156]). Leur travail s'inscrit en plein dans la volonté de généralisation de la théorie du corps de classes aux extensions non abéliennes, que nous avons évoquée en 3.1.2. Ils font d'ailleurs référence à l'idée de Noether[12] de l'utilisation de méthodes non commutatives dans le cadre des théories commutatives. Mac Lane connaissait déjà en partie la théorie du corps de classes, ayant assisté à un cours d'Emil Artin sur ce sujet alors qu'il était à Göttingen. Mais il avait trouvé ce domaine extrêmement compliqué. Sa collaboration avec Schilling lui permit de combler certaines de ses lacunes à ce sujet. Surtout, il fut véritablement fasciné[13] par les systèmes de facteurs qui apparaissent dans la description des "crossed-

[10] *Survey of Modern Algebra.*

[11] Nous avons déjà eu l'occasion d'évoquer cette Conférence de 1940, pour laquelle Hopf avait envoyé un résumé de son travail sur le deuxième groupe d'homologie, qui parvint trop tard pour être retenu.

[12] *Ibid.* p. 295.

[13] Ce terme n'est pas exagéré. Il est employé par Mac Lane lui-même dans son autobiographie, p. 99. "Fascinating" est également le terme employé par Clifford et Mac Lane (dans [42], p. 387) au sujet des caractères croisés.

product algebras"[14] qui interviennent nécessairement dans leur étude. Mac Lane commença alors à étudier plus particulièrement les systèmes de facteurs, et en particulier à en examiner l'utilisation dans la théorie des extensions de groupes. On pourra noter également qu'il les étudia de concert avec A. H. Clifford en lien avec un problème soulevé par ses recherches avec Schilling[15]. Clifford fit remarquer à Mac Lane et Schilling que leur travail n'était pas étranger à celui de Schur sur le multiplicateur[16]...

C'est l'année où son travail avec Schilling et Clifford fut publié que Mac Lane fut invité à parler dans le cadre des cours Ziwet de l'Université du Michigan. Il choisit de s'exprimer sur les extensions de groupes.

9.2 Une rencontre mathématique

9.2.1 Le solénoïde

La rencontre mathématique entre Eilenberg et Mac Lane se fit autour d'une coïncidence. Un calcul apparaissant dans les exemples d'extensions de groupes traités par Mac Lane lors de son cours à l'Université du Michigan, ainsi qu'un des groupes y intervenant, ont surpris Eilenberg car il les avait déjà vus dans un cadre totalement différent. Il apparut aux deux protagonistes que cette coïncidence n'en était probablement pas une, peut-être parce que le groupe en question n'est pas des plus communs, et certainement parce qu'Eilenberg et Mac Lane étaient sensibles à la possibilité qu'il y ait derrière cela quelque chose de profond à comprendre[17].

Ce qui est remarquable avec cette "coïncidence", ce sont ses racines. Il faut en effet nous replonger dans cet article [226] de 1927 de Vietoris que nous avons étudié plus tôt dans ce mémoire, qui présentait pour la première fois une notion d'homologie, et plus précisément de groupe d'homologie, pour une classe d'objets plus vaste que celle des complexes simpliciaux. La définition de Vietoris à l'aide des suites fondamentales fut la première à proposer une homologie pour d'autres objets que les complexes combinatoires, qui n'étaient au fond que des approximations des espaces les plus simples.

Rétrospectivement, il apparaît que toutes les théories d'homologie proposées pour les espaces compacts (inclus dans une variété n-dimensionnelle orientée, ou même plus simplement $\mathbb{R}^n$) présentent des défauts pour certains

[14] Les produits croisés, voir 3.1.1.

[15] Cf. [42].

[16] Cf. [156] p. 296.

[17] Selon Mac Lane, un des traits caractéristiques d'Eilenberg pouvait être décrit ainsi : "Sammy's idea was to dig deep and deeper till he got to the bottom of each issue" (cf. [18] p. 1346).

espaces. Par défaut on peut entendre que l'homologie calculée ne correspond pas à celle que l'on aimerait voir attribuée à l'espace au vu de ses propriétés, le non-respect des théorèmes les plus fondamentaux comme ceux de dualité, etc.

Dans [226], Vietoris introduit un nouvel objet topologique, le 2-solénoïde[18]. Il le considère car cet objet, qui est pourtant un continuum, donc un objet aux propriétés topologiques plutôt bonnes, se comporte mal vis-à-vis de sa définition de groupe fondamental[19]. Il avait identifié le fait que, pour un 2-solénoïde noté K, toutes les suites fondamentales de 1-cycles orientés étaient des suites nulles, ce qui signifiait que le premier groupe d'homologie était trivial. Son groupe fondamental (de base un point quelconque de K) était également trivial. Mais un phénomène très curieux apparaissait en considérant l'espace K^* obtenu à partir de K simplement en ajoutant un chemin de $(0,0)$ à $(0,1)$. Le groupe fondamental de K^* était trivial en prenant pour point base $(1,1)$ mais admettait par contre une base à un élément si $(0,0)$ était pris pour point base[20]. Ce défaut stigmatisait essentiellement le fait que le 2-solénoïde n'est pas connexe par arcs.

Il semble[21] que Borsuk et Eilenberg aient posé en 1937 le problème de la détermination du nombre de classes d'homotopie d'applications continues $S^3 \setminus \Sigma \to S^2$, où Σ est un solénoïde. Les solénoïdes apparaissent déjà dans

[18] Un p-solénoïde est un groupe topologique obtenu comme limite inverse $S^1 \overset{p}{\leftarrow} S^1 \overset{p}{\leftarrow} S^1 \overset{p}{\leftarrow} ...$, où chaque cercle est enroulé p-fois autour du précédent. Un p-solénoïde peut être plongé dans $\mathbb{R}^3$ sous la forme qui suit. Soit T_0 un tore, T_1 un tore plongé à l'intérieur de T_0 en s'enroulant p fois, T_2 un tore plongé à l'intérieur de T_1 en s'enroulant p fois, etc. L'espace $\bigcap_{i\geq 0} T_i$ est un p-solénoïde dans $\mathbb{R}^3$. C'est un espace compact, connexe et non vide ; on désigne parfois ce type d'espaces par "continuum". Au sujet des solénoïdes, on pourra consulter l'article [48] de David van Danzig, première étude systématique de ces objets topologiques ; van Danzig s'y intéresse principalement pour leur propriété d'homogénéité (un espace topologique E est dit "homogène" si pour tous points p, q de E, il existe un homéomorphisme de E envoyant p sur q). Voir également l'introduction de [218].

Dans [226], Vietoris ne définit pas le 2-solénoïde sous cette forme-là ; il l'obtient en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ en considérant l'ensemble triadique de Cantor C sur l'axe des abscisses, en traçant à partir de chaque point $(x,0)$ de C un segment de longueur 1 le reliant à $(x,1)$, puis en identifiant chaque $(x,0)$ avec un point $(f(x),1)$ où f est un certain homéomorphisme de C.

[19] Cf. le chapitre sur la naissance des groupes d'homologie. Le groupe fondamental de Vietoris n'est pas celui défini usuellement. Il est défini à l'aide de versions discrètes des chemins, sur le même principe que ses groupes d'homologie. Cette version du groupe fondamental a été abandonnée tandis que les groupes d'homologie de Vietoris ont été repris et améliorés par la suite (l'homologie de Čech notamment s'en inspire). Cf. la note p. 253 de [75].

[20] Cf. [226] p. 460.

[21] Cf. [67] p. 758.

leur article commun [20] de 1936. Ils y introduisent, pour un espace métrique M, le quotient de $(S^1)^M$ par l'ensemble des fonctions de la forme $e^{i\varphi(x)}$, où φ est continue sur M (si M est compact, faire ce quotient revient à raisonner à homotopie près). Ils y remarquent que, s'il est vrai que pour un espace métrique compact M, la trivialité de ce quotient équivaut à l'annulation du premier nombre de Betti (au sens de l'homologie de Vietoris), ce n'est plus forcément le cas sans l'hypothèse de compacité. C'est justement la considération de $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ qui leur donne un contre-exemple.

Dans l'article [63] de 1940, Eilenberg continue d'examiner les classes d'homotopie d'applications continues d'un complexe cellulaire dans un espace topologique. Son idée est de relier ces classes d'homotopie à des invariants topologiques connus, comme l'homologie[22]. Pour ce faire, il utilise des chaînes à coefficients dans un groupe d'homotopie. Les complexes sont supposés localement finis, mais peuvent être infinis, ce qui l'amène à tolérer des chaînes infinies dans son homologie. Un de ses résultats, appliqué[23] au complexe cellulaire infini K en lequel se décompose $S^3 \setminus \Sigma$, permet de voir que l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $S^3 \setminus \Sigma \to S^2$ est en bijection avec le premier groupe d'homologie $H_1(K, \mathbb{Z})$.

C'est précisément ce premier groupe d'homologie qui se posait en contre-exemple dans le cadre de la théorie développée par Borsuk et Eilenberg en 1936. Or, dans un article de 1940, Norman Steenrod proposa une nouvelle définition des groupes d'homologie d'un espace métrique compact, se basant sur la notion de cycle "régulier"[24]. Cette motivation provint, comme il l'indiqua clairement en introduction, du travail d'Eilenberg mentionné ci-dessus, qui relie les propriétés homotopiques de $S^n \setminus X$ aux groupes d'homologie d'un complexe cellulaire décrivant $S^n \setminus X$. Il espérait notamment, avec une homologie adaptée, déterminer les classes d'homotopie de $S^3 \setminus \Sigma \to S^2$.

L'homologie de Vietoris comme celle de Čech ne sont pas satisfaisantes lorsqu'il s'agit de les appliquer à un espace comme le solénoïde car la dualité d'Alexander est mise en défaut. Steenrod souligne ce problème[25] dans

[22]Par exemple, les classes d'homotopie d'applications du cercle S^1 dans Y forment le groupe de Poincaré $\pi_1(Y)$, dont l'abélianisé est le premier groupe d'homologie. Il est à noter que cet article d'Eilenberg se place dans la continuité d'un article de Whitney ([242]) reliant les classes d'homotopie d'applications $K^n \to S^n$ à la cohomologie à coefficients entiers de K^n, K^n désignant le sous-complexe de K formé par les cellules de dimension inférieure ou égale à n.

[23]Ce qu'il ne fait pas dans l'article.

[24]Cf. [214].

[25]Ce problème est bien expliqué dans [81] : nous en reproduisons ici l'essentiel.

Le défaut au niveau de la dualité existe non seulement pour l'homologie de Vietoris et de Čech mais aussi pour l'homologie singulière (que nous définissons plus loin dans ce chapitre) ! Il n'est pas tout le temps vrai que $\bar{H}^q(A) \simeq \bar{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ si A désigne son article [214]. Vietoris avait en effet montré que le groupe d'homologie en dimension 1 du solénoïde était trivial mais il apparaît que le groupe d'homologie en dimension 1 de son complémentaire ne peut être trivial car il contient des cycles qui entourent le solénoïde.

Pour Steenrod, le problème vient soit de ce qu'il y a trop peu de cycles, soit de ce que la condition pour être un bord est trop faible. Il améliore cet aspect de l'homologie de Vietoris en définissant des cycles qui se trouvent être très proches de ceux de Vietoris (les $(q-1)$-cycles, ou "suites fondamentales" de Vietoris, sont en correspondance biunivoque avec les q-cycles réguliers), mais pour lesquels la condition "être un bord" est renforcée.

Un point fort de la théorie développée par Steenrod est qu'il associe un complexe, dit "fondamental", à un espace métrique compact X. Cette construction est, elle, inspirée de l'utilisation par Čech des recouvrements et du nerf pour la définition de son homologie. Le complexe fondamental K obtenu est d'étoile finie[26] et son homologie (des cycles infinis) $H_q(K,G)$ est isomorphe à celle obtenue par Steenrod avec les cycles réguliers sur l'espace X, que nous noterons ${}_rH_q(X,G)$.

Grâce à ce complexe, Steenrod retrouve une propriété de dualité pour son homologie ; il sait en particulier que ${}_rH_1(S^3 \setminus \Sigma, \mathbb{Z}) \simeq {}_rH_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Il parvient également à exprimer ${}_rH_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ comme le quotient du groupe des suites d'entiers $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ par le sous-groupe des suites $(x_i)_{i\geq 1}$ telles que le système d'équations $\{py_{i+1} - y_i = x_i,\ i \geq 1\}$ admet une solution $(y_i)_{i\geq 1}$ à coefficients entiers[27]. Ainsi, même s'il n'obtient pas une description très explicite de ${}_rH_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, il est néanmoins capable d'en identifier plusieurs propriétés[28] et le groupe qu'il a décrit est précisément le groupe des classes d'homotopie d'applications continues $S^3 \setminus \Sigma \to S^2$, dont il prouve ainsi qu'il a la puissance du continu. A noter, car c'est important pour comprendre la remarque d'Ei-

---

un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{H}$ l'homologie ou la cohomologie réduite. Il faut que le complexe soit localement contractile pour cela. Si l'on enlève cette hypothèse, il vaut mieux utiliser la cohomologie de Čech, qui traite mieux les objets aux mauvaises propriétés locales. L'isomorphisme devient alors $\check{H}^q(A) \simeq \bar{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. Mais il est néanmoins toujours mis en défaut par des espaces aux propriétés locales exceptionnelles comme le solénoïde. En effet pour le 2-solénoïde Σ, on a $\check{H}_0(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}$ tandis que l'on peut calculer $H^2(S^3 \setminus \Sigma)$ et montrer qu'il est indénombrable. Comme $H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma) \simeq H^2(S^3 \setminus \Sigma) \oplus \mathbb{Z}$, la dualité n'est donc pas vérifiée vu que $\check{H}_0(\Sigma)$ n'est pas isomorphe à $H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$.

[26]"Star-finite complex", cf. [145] pp. 89-90. Un complexe d'étoile finie est un complexe dans lequel tout simplexe appartient au bord d'un nombre fini de simplexes mais par contre le bord d'un simplexe peut être composé d'une infinité de simplexes.

[27]En réalité il considéra des solénoïdes plus généraux que les p-solénoïdes mais, en vue de l'interprétation de Mac Lane à l'aide des extensions de groupes, nous nous contenterons de parler ici des p-solénoïdes.

[28]Cf. [214], théorème 12 p. 849.

lenberg face à l'exposé de Mac Lane, que pour calculer ${}_rH_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, Steenrod passe en fait par le premier groupe de cohomologie (au sens de Vietoris) de Σ, qu'il sait être isomorphe au groupe $\mathrm{Car}(\Sigma)$.[29]

9.2.2 Homologie et extensions de groupes

Dans son dernier exposé dans le cadre des Cours Ziwet, Mac Lane avait prévu de calculer le groupe des extensions $\mathrm{Ext}(H, \mathbb{Z})$, où H est le groupe abélien engendré par une famille dénombrable de générateurs $(g_i)_{i\geq 1}$ soumis aux relations $pg_{i+1} = g_i$ pour un nombre premier p fixé[30]. Il montra en privé à Eilenberg que $\mathrm{Ext}(H, \mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe additif de l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$. Celui-ci lui aurait dit : "That's just like the Steenrod homology of the p-adic solenoid. Something mysterious is going on here". Eilenberg connaissait bien entendu l'article de Steenrod qui prolongeait son propre travail – Steenrod et lui étant membres de la même équipe – et l'exposé de Mac Lane survint dans l'année suivant la parution de cet article. Il n'est donc pas étonnant qu'Eilenberg ait réagi si rapidement devant les calculs de Mac Lane, qui ressemblaient fortement à ceux menés par Steenrod pour décrire ${}_rH_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. En outre, il a reconnu[31] en le groupe H le groupe des caractères $\mathrm{Car}(\Sigma)$ du solénoïde[32]. Les réflexions de Mac Lane révélaient donc aux yeux d'Eilenberg l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{Car}(\Sigma), \mathbb{Z}) \simeq {}_rH_1(\Sigma, \mathbb{Z}). \tag{1}$$

Ayant réalisé cela, Eilenberg et Mac Lane restèrent toute la nuit à tenter de trouver la raison pour laquelle l'algèbre et la topologie s'intersectaient dans l'isomorphisme (1). Ils poursuivirent leurs investigations en collaboration pendant plusieurs mois, ce qui se concrétisa par un rapport préliminaire [66] de leurs résultats, adressé aux *Proceedings of the National Academy of*

[29] Il définit le solénoïde à l'aide d'une limite inverse de groupes (ces groupes étant en chaque degré $\mathbb{R}$ mod 1, qui est homéomorphe au cercle) et utilise un résultat de Pontrjagin sur la dualité pour obtenir $\mathrm{Car}(\Sigma)$ comme une limite directe, à savoir celle résultant de la suite duale de celle définissant Σ.

[30] Mac Lane s'intéressait particulièrement aux extensions abéliennes $1 \to \mathbb{Z} \to E \to Q \to 1$, où Q est un groupe défini par générateurs et relations, une telle présentation de Q lui permettant de mettre en œuvre des méthodes pratiques de calculs que nous avons évoquées en 4.2.2. Néanmoins nous ne saurions dire comment Mac Lane en est venu à considérer précisément ce groupe H.

[31] Cf. [153] p. 30 : "he pointed out that the group I had chosen was (fortunately) the dual to a p-adic solenoid".

[32] Ce groupe apparaît déjà noir sur blanc dans l'article de Steenrod : voir plus haut. La suite duale de $S^1 \xleftarrow{p} S^1 \xleftarrow{p} S^1 \xleftarrow{p} \ldots$ est la suite $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \ldots$ dont on peut vérifier que la limite directe est bien H.

Sciences of the USA en octobre 1941, une présentation en deux temps devant l'American Mathematical Society (septembre et décembre 1941) et enfin un article volumineux [67] soumis en mai 1942 aux *Annals of Mathematics.* Ils eurent même droit à un appendice dans le traité *Algebraic Topology* de Lefschetz.

Ils allièrent leurs connaissances et sensibilités respectives pour analyser les raisons sous-jacentes à l'apparition de (1). Lorsqu'on inspecte leur article [67] de 1942, on comprend que leurs compétences respectives ont été extrêmement utiles, si ce n'est essentielles. Il a fallu la maîtrise de la topologie d'une part, et notamment des différentes théories homologiques et des théorèmes de dualité, et la maîtrise du formalisme algébrique d'autre part et de la théorie des extensions de groupes. En particulier, le parcours de Mac Lane jusqu'à cette rencontre explique qu'une telle collaboration ait pu voir le jour. S'il n'avait alors pas déjà acquis des connaissances solides en topologie – au point d'assister à la Conférence de l'Université du Michigan de 1940 rappelons-le – on peut imaginer que les remarques d'Eilenberg n'auraient pas inspiré un intérêt et une compréhension suffisantes de sa part pour y consacrer si aisément toute une nuit de réflexion.

Le fruit de leurs recherches dépasse de bien loin une simple explication de (1). Leur principal résultat est consigné sous l'appellation "théorème du coefficient universel" car il exprime le fait que les groupes d'homologie à coefficients dans un groupe quelconque sont déterminés par les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ce résultat s'applique pour les groupes d'homologie d'un compact, si l'on prend l'homologie définie à partir de cycles infinis et la cohomologie à partir de cocycles finis. Précisément, si X est un espace métrique compact et G un groupe quelconque, ce théorème devient[33] :

$$ {}_rH_q(X, G) \simeq \mathrm{Hom}(\check{H}^{q-1}(X, \mathbb{Z}), G) \times \mathrm{Ext}(\check{H}^q(X, \mathbb{Z}), G).^{34} $$

[33]Cf. [67] p. 824.

[34]Les $\check{H}^q$ désignent la cohomologie de Čech. Sous cette forme, le théorème du coefficient universel montre entre autres que l'homologie régulière n'est en fin de compte pas un nouvel invariant topologique, au sens où elle peut être exprimée à l'aide de la cohomologie de Čech.

Ce théorème est maintenant énoncé sous une forme plus générale, à l'aide de l'homologie singulière, et plutôt de sorte à exprimer la cohomologie à coefficients quelconques à l'aide de l'homologie à coefficients entiers. On préfère en effet parler uniquement de cycles finis et considérer les cocycles infinis. On passe d'une version à l'autre du théorème en dualisant. Dans les ouvrages de référence [154] et [101] par exemple, ce théorème affirme, pour un complexe K de groupes abéliens, que l'on a la suite exacte :

$$ 0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(K, \mathbb{Z}), G) \to H^n(K, G) \to \mathrm{Hom}(H_n(K, \mathbb{Z}), G) \to 0. $$

Si l'on revient à la formulation originelle de ce résultat, une dimension essentielle de celui-ci est, comme le remarque bien Ralf Krömer ([138] p. 55), le fait qu'il relie l'homologie

Si X est également supposé connexe alors $\check{H}^0(X,\mathbb{Z}) = 0$ donc, pour $q = 1$, on a ${}_rH_1(X,G) \simeq \mathrm{Ext}(\check{H}^1(X,\mathbb{Z}),G)$. Si l'on prend pour X le solénoïde Σ et si l'on pose $G = \mathbb{Z}$, on obtient donc : ${}_rH_1(\Sigma,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Ext}(\check{H}^1(\Sigma,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$.Des résultats de dualité permettent finalement de réduire cet isomorphisme à

$${}_rH_1(\Sigma,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Ext}(\mathrm{Car}(\Sigma),\mathbb{Z}),$$

où l'on rappelle que le groupe $\mathrm{Car}(\Sigma)$ était le groupe H introduit par Mac Lane dans son exposé.

L'article d'Eilenberg et Mac Lane se termine sur cette application du théorème du coefficient universel au cas du solénoïde, comme un retour sur l'objet initial de la recherche. L'exemple donne lieu au calcul de ${}_rH_1(\Sigma,\mathbb{Z})$ via celui du groupe des extensions $\mathrm{Ext}(\mathrm{Car}(\Sigma),\mathbb{Z})$. Le calcul passant par le groupe des extensions est au fond assez proche de celui effectué par Steenrod, seulement Mac Lane reconnaît plus facilement qu'il ne s'agit de rien d'autre que $\mathbb{Z}_p$. Ce calcul de l'homologie du solénoïde permet de constater que l'on peut en effet utiliser la théorie des extensions de groupes pour calculer de l'homologie mais il est finalement secondaire comparé aux avancées théoriques réalisées par Eilenberg et Mac Lane.

Notre intérêt pour cet article, même si nous ne pouvons que rester superficiel à son sujet, consiste essentiellement en deux points[35]. D'un côté, il traduit de la part des auteurs la même volonté que celle que nous avons vue chez Hopf dans son article de 1945, de comprendre d'un point de vue algébrique et abstrait comment un objet purement algébrique pouvait décrire un objet issu de la topologie. Ici, il s'agissait de comprendre comment une extension de groupes pouvait mener à l'homologie d'un espace. Ainsi, aux Etats-Unis, parallèlement à ce que Hopf faisait en Suisse, voyait également le jour l'idée que la topologie et l'algèbre étaient profondément liées, au point que des constructions algébriques pouvaient fournir des renseignements topologiques, et même que l'algèbre seule pouvait expliquer les propriétés homologiques ou cohomologiques de certains espaces.

D'un autre côté, la genèse du théorème du coefficient universel est singulière car elle eut pour moteur principal un objet pathologique, le solénoïde. Celui-ci fut introduit au départ par Vietoris pour tester son homologie et révéler une faille de sa définition. Cet objet, retenu entre autres pour tester

fondée sur des cycles infinis à la cohomologie fondée sur des cocycles finis. Pour le calcul de l'homologie du solénoïde par exemple, ce résultat est une réelle avancée par rapport au calcul de Steenrod qui devait en passer par les cycles réguliers, qui sont infinis.

[35]Nous occultons bien sûr, car ce n'est pas le sujet ici, une dimension très importante de cet article, à savoir qu'il marque une étape décisive dans la conception de la notion de fonctorialité ; cf. [138], section 2.2.

les améliorations apportées à l'homologie des espaces, a finalement permis la découverte d'un théorème très général. Cette histoire est peu commune car c'est plus souvent l'observation de plusieurs situations analogues qui mène à l'idée d'un résultat général les englobant. En ce qui concerne le sonéoïde, c'est au contraire probablement son caractère exceptionnel qui a fait qu'Eilenberg l'a si bien reconnu, sous sa forme duale, dans le calcul d'extension de Mac Lane.

9.3 Les relations entre homologie et homotopie selon Eilenberg et Mac Lane

Parlant des articles écrits en commun avec Eilenberg, Mac Lane dit ceci[36] :

"They all involved the maxim : Dig deeper and find out. For example, Hurewicz and Heinz Hopf had observed that the fundamental group of a space had effects on the higher homology and cohomology groups. Sammy, with his knowledge of his singular homology theory, had just the needed tools to understand this, which resulted in our discovery of the cohomology of groups."

Le but de cette section est d'analyser de quelle manière Eilenberg et Mac Lane sont parvenus, parallèlement à Hopf et Eckmann, à la cohomologie des groupes, et l'apport de l'homologie singulière pour ce faire. Nous commençons par expliquer en quoi celle-ci consiste.

9.3.1 L'homologie singulière

En 1944, Eilenberg propose une nouvelle théorie d'homologie dans un article, paru aux *Annals of Mathematics*[37]. L'idée en soi de cette théorie, dite "théorie de l'homologie singulière", n'est cependant pas si nouvelle[38] mais Eilenberg en donne un nouveau traitement qui la rend satisfaisante et, en un sens, achevée[39].

[36]Cf. [18] p. 1346.

[37]Il s'agit de [65], soumis en octobre 1943.

[38]Elle a été abordée dans les plus grands manuels de topologie de l'époque ; dans *Algebraic Topology* de Lefschetz, *Topologie* d'Alexandroff&Hopf ou encore dans le *Lehrbuch der Topologie* de Seifert&Threlfall.

[39]Selon le jugement de Mac Lane au sujet d'Eilenberg, cf. [18] p. 1346 : "Finding the Lefschetz book (1942) obscure in its treatment of singular homology, he provided an elegant and definitive treatment in the Annals (1944)."

Comme l'explique Eilenberg lui-même, construire une théorie d'homologie consiste à donner un procédé d'approximation des espaces topologiques, qui fournira un complexe abstrait, et une théorie des complexes abstraits. Différentes théories de l'homologie avaient été élaborées jusque là, mais basant plutôt leur approximation sur la considération des applications continues $T : X \to P$ de l'espace X dans des polyèdres P. L'homologie de Čech, par exemple, relève de ce principe. Or on peut également espérer construire une théorie de l'homologie à partir d'applications continues $T : P \to X$. Cette manière d'opérer a d'ailleurs une origine plus ancienne que la précédente. Le principal problème identifié, présent même dans le traitement de Lefschetz[40] (jusque là le plus abouti) est l'apparition d'éléments d'ordre 2, ce qui rend impossible la mise au point d'un complexe abstrait pertinent vu que dans un complexe abstrait on souhaite que les groupes de chaînes soient libres.

Eilenberg se donne donc pour but dans son article d'améliorer la théorie existante de l'homologie singulière, et la rend au final irréprochable. Sa motivation est d'autant plus grande que l'homologie singulière se prête bien à l'étude des propriétés de l'homotopie supérieure, théorie à laquelle il a déjà contribué à plusieurs reprises[41].

Dans [144], Lefschetz avait défini une cellule singulière sur un espace topologique X comme la donnée d'un triplet (e_p, T, E_p), e_p étant une cellule simpliciale orientée (de dimension p) et T une application continue de e_p dans un sous-ensemble E_p de X. Avec des notations actuelles, une cellule singulière n'est donc rien d'autre que la donnée d'une application $T : e_p \to E_p$. Sont considérées comme équivalentes deux cellules $T : e_p \to E_p$ et $T' : e'_p \to E_p$ s'il existe une transformation barycentrique[42] $U : \bar{e}'_p \to \bar{e}_p$, où $\bar{e}'_p$ et $\bar{e}_p$ sont les simplexes géométriques associés à e'_p et e_p, telle que $T' = TU$. Comme à l'accoutumée sont définies des chaînes (singulières), à savoir des combinaisons linéaires de cellules (singulières) à coefficients dans un groupe donné, ainsi qu'une application bord.

Outre l'apparition d'éléments d'ordre 2, Lefschetz constate la présence de chaînes dites "dégénérées", c'est-à-dire pour lesquelles $T(e_p)$ est de dimension strictement inférieure à p. Il décide de toutes les considérer comme nulles, s'assurant que cela est cohérent avec la notion de bord.

Et finalement, si l'on considère l'ensemble des chaînes singulières de X, l'application bord en fait bien un complexe, appelé par Lefschetz "complexe singulier total"[43] de X. Ce complexe est un "complexe de bord fini" ("closure-

[40] Cf. par exemple la fin de l'article [144] de Lefschetz.

[41] Comme dans [61] et [62].

[42] C'est-à-dire une application préservant les barycentres, donc en fait simplement une application affine.

[43] "Complete singular complex", cf. [145] p. 312.

finite complex") et ses groupes d'homologie sont des invariants topologiques[44].

Dans [65], Eilenberg reprend dans une large mesure les idées présentes chez Lefschetz mais introduit quelques modifications afin d'en éliminer les problèmes. Il considère des simplexes géométriques non dégénérés d'un espace euclidien dont les sommets sont ordonnés. Un tel simplexe s, de dimension q, pourra donc s'écrire sous la forme $s =< p_0, ..., p_q >$, les p_i désignant ses sommets. Ses faces $s^{(i)}$ sont également ordonnées, sous la forme $s^{(i)} =< p_0, ..., \hat{p}_i, ..., p_q >$. Un q-simplexe singulier dans un espace topologique X est alors une application continue $T : s \to X$[45] de source un simplexe s tel que décrit ci-dessus. Deux q-simplexes singuliers $T_1 : s_1 \to X$ et $T_2 : s_2 \to X$ sont dits équivalents s'il existe une application barycentrique de s_1 dans s_2 *préservant l'ordre des sommets*. Il peut ensuite définir de manière similaire à Lefschetz un complexe, nommé "complexe singulier" de X et qui est également un complexe de bord fini[46].

A vrai dire, dans cet article, Eilenberg avait commencé par mener une étude générale des complexes abstraits de bord fini. Ces complexes sont en fin de compte soumis aux mêmes conditions que tous les complexes abstraits que nous avons vus dans ce mémoire[47] donc nous ne détaillons pas l'axiomatique qu'en donne Eilenberg.

Le complexe singulier défini par Eilenberg ne peut s'avérer légitime que si l'homologie qui lui est associée coïncide bien avec l'homologie classique dans le cas des polyèdres. Pour montrer cela, il utilise de manière systématique le concept de "transformation de chaînes" (l'"Homologie-Abbildung" au sens d'Eckmann) et plus précisément celui d'"équivalence de chaînes". Si K_1 et K_2 sont deux complexes abstraits (de bord fini), une transformation de chaînes $\tau : K_1 \to K_2$ est la donnée de morphismes, en toute dimension q, entre les groupes des q-chaînes ($\tau : C^q(K_1) \to C^q(K_2)$), commutant avec le bord ($\tau\partial = \partial\tau$). Deux transformations de chaînes $\tau_1, \tau_2 : K_1 \to K_2$ sont dites homotopes (ce qui se note $\tau_1 \simeq \tau_2$) s'il existe en toute dimension q un morphisme $D : C^q(K_1) \to C^q(K_2)$ tel que, pour toute q-chaîne c^q, $\partial D c^q = \tau_2 c^q - \tau_1 c^q - D\partial c^q$.

[44] Cf. [145] pp. 312-3. Un complexe de bord fini est un complexe dans lequel le bord de tout simplexe est fini ou, pour le dire autrement, admet un nombre fini de faces : cette condition assure que le bord de toute chaîne s'écrit comme une combinaison linéaire finie.

[45] Cette notation, faisant intervenir une flèche, est bien employée par Eilenberg mais elle ne l'était par contre pas par Lefschetz, que ce soit dans son article de 1933 comme dans *Algebraic Topology*.

[46] On pourra trouver cette description d'Eilenberg, et les détails techniques qui l'accompagnent, aux pages 420 et 421 de [65].

[47] Pour les besoins d'autres théories d'homologie, des complexes abstraits différents avaient été considérés, comme les complexes d'étoile finie ("star-finite complex") par exemple, qui sont soumis eux à la condition que tout simplexe est face d'un nombre fini de simplexes (cf. [145] pp. 89-90).

Une transformation de chaînes $\tau : K_1 \to K_2$ est appelée équivalence de chaînes s'il existe une transformation de chaînes $\rho : K_2 \to K_1$ telle que $\rho\tau \simeq 1$ et $\tau\rho \simeq 1$, 1 désignant la transformation identité.

Pour légitimer son complexe singulier, Eilenberg doit montrer que le complexe simplicial $k(P)$ (dont les simplexes sont orientés) associé à un polyèdre localement fini P muni d'une décomposition simpliciale détermine les mêmes homologie et cohomologie que le complexe singulier $S(P)$. Pour ce faire il introduit un troisième complexe, noté $K(P)$, dont une q-cellule est un système ordonné $v_0...v_q$ de sommets de P, non forcément distincts, appartenant à un seul et même simplexe géométrique de P. Il construit une première équivalence de chaînes entre $K(P)$ et $k(P)$ et une seconde entre $K(P)$ et $S(P)$. Comme une équivalence de chaînes entre deux complexes induit un isomorphisme entre leurs groupes d'homologie et de cohomologie, il montre ainsi que $k(P)$ et $S(P)$ ont bien mêmes homologie et cohomologie. En particulier, l'homologie singulière est bien un invariant topologique de P en tant qu'espace.

Un peu plus loin dans son article, Eilenberg se penche sur la possibilité de munir $S(X)$ de produits. Dans un article de 1938 ([243]), Whitney avait traité de manière générale le problème de la définition des produits dans un complexe. Il avait isolé une classe de complexes admettant une théorie des produits mais le complexe singulier n'entre pas dans celle-ci, et Eilenberg est contraint de définir les produits pour chacun des complexes $k(P)$, $K(P)$, $S(P)$. Il commence par donner une axiomatique du produit "cup" (le produit entre cochaînes) et en déduit une, à l'aide de l'indice de Kronecker, pour le produit "cap" (le produit entre une cochaîne et une chaîne). Il propose ensuite une définition explicite des produits pour $k(P)$, $K(P)$, $S(P)$ et laisse le lecteur se convaincre qu'ils satisfont aux axiomes posés juste avant. Eckmann s'est clairement inspiré de cet exposé très clair pour l'étude de son produit U (l'équivalent du produit "cup") en lien avec la cohomologie.

Au final, cet article d'Eilenberg incarne un moment important de la topologie. Il fonde enfin une théorie de l'homologie satisfaisante sur la base des simplexes singuliers, qui se posent depuis longtemps comme les plus intuitifs pour ce qui est de l'approximation des espaces topologiques. Son exposé, très clair, utilise également de manière systématique des concepts (comme l'équivalence de chaînes) qui sont pertinents pour comparer homologies et cohomologies de différents complexes. Il initie ainsi à une certaine manière de démontrer les théorèmes de la topologie algébrique, qui commence à donner leur place aux diagrammes, qui synthétisent l'information et réduisent les manipulations de chaînes, cycles, bords, etc.

L'homologie singulière est une théorie conceptuellement simple, ce qui est une qualité toujours appréciée des mathématiciens. Elle a comme point fort de donner un complexe, $S(X)$, associé à un espace topologique, codant l'homologie de cet espace – c'est une caractéristique commune à l'homologie de Čech mais pas à celle de Vietoris par exemple. Cette idée sera utilisée par Eilenberg, Mac Lane et Eckmann pour étudier la seule dépendance de l'homologie et de la cohomologie d'un espace asphérique en le groupe fondamental, et en un sens également pour la définition de l'homologie et de la cohomologie des groupes.

L'homologie singulière présente aussi l'avantage d'être adaptée à l'étude de l'homotopie. Eilenberg s'en sert pour établir en fin d'article quelques résultats en lien avec l'homotopie[48] et, de manière générale, elle est intéressante en ce que les groupes d'homologie singuliers d'espaces homotopiquement équivalents sont isomorphes. En outre, si l'on se fie au jugement de Jean Dieudonné[49], l'homologie singulière avait été rejetée dans les années 1930 parce qu'en son état d'alors, elle était inadaptée aux tentatives d'extension de la dualité d'Alexander. Il est remarquable qu'en en améliorant la définition, Eilenberg, aidé de Mac Lane, s'en serve pour étendre les théorèmes d'invariance de l'homologie et de la cohomologie aux espaces[50] et arrive finalement à établir la dualité d'Alexander pour les espaces[51].

9.3.2 Homologie et homotopie

Eilenberg et Mac Lane ont commencé par relier les extensions de groupes à l'homologie et la cohomologie à travers le théorème du coefficient universel. Dans l'article [67] qui y est consacré, ils dégagent en lien avec leur étude des relations entre les homomorphismes et les systèmes de facteurs, i.e. entre Hom et Ext, l'idée d'homomorphisme "naturel", qui préfigure le concept de foncteur. Leur article suivant [68], soumis en octobre 1942, est consacré au développement de la naturalité. Pendant l'élaboration de cet article parut le texte fondamental de Hopf [121] sur le groupe fondamental et le deuxième groupe d'homologie. Les résultats de celui-ci donnèrent une nouvelle orientation à la collaboration d'Eilenberg et Mac Lane car c'était un sujet qui leur

[48] Avec des outils qui, nous le verrons bientôt, resserviront dans [69] et [70].

[49] Cf. [55] p. 69.

[50] Cf. l'autobiographie de Mac Lane [155], p. 129. Après avoir rappelé les résultats de 1942 et 1943 de Hopf, il dit : "Eilenberg suggested to me that we might use our techniques to find a better formula for this determination. To do this, we used Eilenberg's recent systematic formulation of singular homology, which used the singular complex of a space X, often written $S(X)$."

[51] Cf. [55] p. 79.

était proche, et dont il sentirent qu'ils pouvaient s'y consacrer avec succès[52]. De fait, ils enchaînèrent directement dans la voie ouverte par Hopf, envoyant en avril 1943 un premier rapport [69] de 4 pages aux *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, discutant des relations entre groupes d'homologie et groupes d'homotopie.

Ce rapport commence par rappeler les résultats de Hopf de 1942, ainsi que ceux de son supplément de 1943 [122], qui indiquait notamment que le groupe fondamental d'un polyèdre acyclique en dimensions 2 à $n-1$ détermine l'homologie en dimension inférieure à $n-1$, ainsi que le quotient $\mathfrak{B}^n/\mathfrak{S}^n$ du n-ième groupe d'homologie par le groupe des classes des n-cycles sphériques. La question à laquelle allait s'attaquer Hopf par la suite était, pour mémoire, de comprendre le mécanisme de cette détermination.

Eilenberg et Mac Lane trouvent eux aussi que les considérations de Hopf manquent d'une explicitation algébrique des $\mathfrak{B}^n/\mathfrak{S}^n$. Ils annoncent traiter le problème de façon nouvelle et obtenir ainsi une description algébrique de ces quotients. La clé est l'observation que le groupe $\dfrac{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{R})}$ considéré par Hopf peut être vu comme $\mathrm{Car}(\mathrm{Extcent}(\mathfrak{G}, \mathbb{R} \bmod 1))$, où Extcent désigne le groupe des extensions centrales, ce résultat se généralisant en dimension supérieure.

Dans le rapport de 1943, leurs résultats sont énoncés pour un polyèdre connexe localement fini[53], c'est-à-dire pour le même type d'objets que les complexes considérés par Hopf. Selon eux, leurs résultats restent néanmoins valides pour un espace connexe par arcs – c'est sur la base de l'homologie singulière qu'Eilenberg est en train d'élaborer que ceci sera fait dans leur article détaillé [70] de 1945.

A partir de ce point, nous adoptons les notations d'Eilenberg et Mac Lane. Le groupe fondamental du polyèdre P sera noté π et G désignera un groupe de coefficients. Eilenberg et Mac Lane commencent par associer un complexe $K(\pi)$ de bord fini au groupe π. Ce complexe est formé de groupes abéliens libres C^q engendrés par des matrices carrées d'ordre $q+1$ soumises à certaines conditions[54]. Ils notent $H_q(\pi, G)$ et $H^q(\pi, G)$ les groupes d'ho-

[52]Cf. [150] p. 137 : "The next major impetus was a beautiful 1942 paper by H. Hopf, "Fundamentalgruppe und Zweite Bettische Gruppe", which showed that a certain part of the second homology group of a space depended (functorially) on the fundamental group. Hopf's paper did not spell out the algebraic form of the dependence, but a rapid study of his results convinced us that this was the sort of dependence which we knew how to understand, algebraically, and we set out to do this. We were right ; our techniques would apply."

[53]Il n'y a par conséquent aucun problème au niveau de la définition de l'homologie et de la cohomologie. Il s'agit donc ici des classiques homologie sur les chaînes finies et cohomologie sur les cochaînes inifinies.

[54]Nous explicitons ce complexe dans la section suivante. Eilenberg et Mac Lane ont dû

mologie et de cohomologie[55] de $K(\pi)$. Pour autant n'apparaît jamais une appellation du type "homologie du groupe π", ce qui indique bien que leur motivation est uniquement topologique, et que $K(\pi)$ est introduit avant tout pour comprendre l'homologie d'un polyèdre asphérique de groupe π.

L'idée consiste à construire une transformation de chaînes[56] entre P et $K(\pi)$. En étudiant ses propriétés, Eilenberg et Mac Lane parviennent à prouver le théorème :

Si $\pi_i(P) = 0$, $1 \leq i \leq n$, alors on a les isomorphismes :

$$H_q(P, G) \simeq H_q(\pi, G), \ q < n,$$

$$H^q(P, G) \simeq H^q(\pi, G), \ q < n,$$

$$H_n(P, G)/S_n(P, G) \simeq H_n(\pi, G).$$

Il leur faut ensuite calculer les groupes $H_q(P, G)$ et $H^q(P, G)$. La dualité de Pontrjagin indique qu'il suffit de calculer, par exemple, les groupes de cohomologie, en vertu de $H_q(\pi, G) \simeq H^q(\pi, \mathrm{Car}(G))$. Le complexe $K(\pi)$ n'est pas utile pour ce calcul ; il est uniquement important d'un point de vue théorique, pour l'établissement des isomorphismes précédents. Eilenberg et Mac Lane montrent que les générateurs des C^q sont en bijection avec les q-uplets d'éléments de π. Il en résulte que le groupe des q-cochaînes de $K(\pi)$ correspond au groupe des fonctions $f : \pi^q \to G$. Le cobord sur ces fonctions est défini par :

$$(\delta f)(p_1, ..., p_{q+1}) = f(p_2, ..., p_{q+1}) + \sum_{i=1}^{q} (-1)^i f(p_1, ..., p_{i-1}, p_i p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_{q+1})$$
$$+ (-1)^{q+1} f(p_1, p_2, ..., p_q).$$

Le groupe de cohomologie $H^q(\pi, G)$ est donc isomorphe au quotient du groupe des q-fonctions de cobord nul par le groupe des q-fonctions de la

chercher à associer un complexe à π afin de définir une homologie et une cohomologie qui ne dépendraient que de ce groupe. La forme sous laquelle ils ont initialement défini $K(\pi)$ provient à notre avis de la transformation de chaînes qu'ils avaient en tête pour relier l'homologie de P à celle de $K(P)$. Dans la version détaillée [70] de ce rapport, ils commencent par donner une autre définition de ce complexe, plus épurée. Nous y reviendrons plus loin.

[55]En fait ils utilisent un caractère différent de H_q pour l'homologie, voulant montrer par cette distinction que les groupes obtenus en homologie sont discrets alors qu'ils sont topologiques en cohomologie. Nous ne gardons pas cette distinction, qui n'est pas très utile.

[56]C'est le principe que nous avons vu utilisé à chaque fois pour prouver des résultats de ce genre dans [65].

forme $f = \delta g$, où g est une g est une $(q-1)$-fonction[57] ; c'est ainsi que $H^q(P, G)$ est explicité algébriquement.

Eilenberg et Mac Lane décrivent ensuite la cohomologie en basse dimension (0, 1 et 2), de la même façon que le fera Eckmann peu après, identifiant notamment le fait que $H^2(\pi, G) \simeq \text{Extcent}(\pi, G)$. Ils terminent sur une généralisation de leur théorème, qui prend pour hypothèse $\pi_i(P) = 0$, pour tout $i \in \{1, ..., n-1\} \setminus \{m\}$ et relie l'homologie et la cohomologie de P à celle d'un certain complexe $K(\pi_m(P), n)$.

Cette étude d'Eilenberg et Mac Lane dont nous venons brièvement d'indiquer la teneur se distingue de celles de Hopf, Freudenthal et Eckmann en ce qu'elle ne reprend pas les outils introduits par Hopf pour établir son isomorphisme sur le deuxième groupe d'homologie. Les deux mathématiciens ont investi le champ des questions ouvert par Hopf de leurs propres idées et techniques. Leur point de vue est un peu plus topologique que celui sous-jacent à l'article de Hopf de 1945. Cet aspect est sensible d'une part parce qu'ils ne mentionnent jamais le concept d'"homologie d'un groupe" et d'autre part parce qu'ils introduisent un complexe abstrait là où Hopf définit les "résolutions libres". La résolution libre est d'essence plus algébrique que le complexe, objet provenant de la topologie, car, bien que s'inspirant de l'existence dans les complexes d'une application bord entre les groupes de chaînes de dimension adjacente, elle est plutôt une généralisation de l'idée de présentation d'un groupe comme quotient d'un groupe libre par un groupe des relations.

9.3.3 Le complexe $K(\pi)$

Afin de bien comprendre le rôle des travaux d'Eilenberg sur l'homologie singulière dans l'élaboration des articles [69] et [70], nous détaillons ici la définition du complexe $K(\pi)$, dans sa première version (celle apparaissant dans le rapport de 1943).

L'élaboration par Eilenberg de l'homologie singulière s'est faite parallèlement aux développements d'Eilenberg et Mac Lane sur les relations entre les groupes d'homologie et les groupes d'homotopie. L'article *Singular homology theory* [65] fut soumis en octobre 1943 tandis que le rapport préliminaire [69] fut soumis en avril 1943 et l'article *Relations between homology and homotopy groups of spaces* [70] en février 1945. La fin du papier sur l'homologie singulière d'Eilenberg traite des liens entre cette théorie et les groupes d'homotopie. Ce qui y est développé est étroitement lié aux outils mis en œuvre

[57]Le lecteur aura noté à quel point la description effectuée ici est proche de celle que nous avons vue précédemment de la part d'Eckmann.

dans [69] et [70], à tel point d'ailleurs qu'il est difficile de déterminer si, sur ce point précis, ce sont les recherches sur l'homologie singulière qui ont influencé celles sur le lien entre groupe fondamental et homologie, ou l'inverse.

A la fin de *Singular homology theory*, Eilenberg introduit les sous-complexes $S_n(X)$ de $S(X)$ dont les q-simplexes singuliers $T : s \to X$ sont ceux pour lesquels T envoie toutes les faces de dimension strictement inférieure à n sur le point base x_0. Le lien entre $S_1(X)$ et π est manifeste vu que toute arête $p_i p_j$ d'un simplexe s est envoyée via T sur un lacet dans X, donc un représentant d'un élément de π.

Dans leur définition originelle de $K(\pi)$, les groupes C^q des chaînes q-dimensionnelles sont librement engendrés par les matrices $\Delta = (d_{ij})_{0\leq i,j\leq q}$, où les d_{ij} sont des éléments quelconques de π soumis aux conditions $d_{ij}d_{jk} = d_{ik}$. Toute matrice de ce genre correspond en fait à une application $T : s^q \to P$, où s^q est un q-simplexe de sommets p_0, p_1, ..., p_q, et T une application continue envoyant tous les p_i sur le point x_0 de P pris comme base des lacets définissant le groupe fondamental de P. En effet, d_{ij} est alors l'élément de π dont $T(\overline{p_i p_j})$ est un représentant, et les relations $d_{ij}d_{jk} = d_{ik}$ traduisent le fait que le triangle $p_i p_j p_k$ est envoyé via T sur une partie homotopiquement triviale de X.

C'est donc de manière matricielle qu'Eilenberg et Mac Lane ont décrit pour la première fois le complexe $K(\pi)$. C'est ainsi qu'il est présenté dans [69] et c'est en l'utilisant sous cette forme-là qu'ils prouvent dans [70] que, sous les bonnes hypothèses d'asphéricité, l'homologie singulière d'un espace ne dépend que de son groupe fondamental[58]. Ils justifient cette présentation matricielle du complexe $K(\pi)$ par sa commodité pratique[59]. On remarquera néanmoins que dans leur article de 1945, Eilenberg et Mac Lane commencent par définir $K(\pi)$ d'une autre manière, dite "homogène" : sous cette forme, $K(\pi)$ revient alors au complexe $\bar{K}(\mathfrak{G})$ introduit par Eckmann comme revêtement acyclique de son propre complexe $K(\mathfrak{G})$, dans lequel on rend triviale l'action de $\mathfrak{G}$ via la condition $\{x_0, ..., x_n\} = \{xx_0, ..., xx_n\}$ pour tout x de $\mathfrak{G}$, ce qui revient somme toute à identifier les cellules se projetant sur la même cellule dans le complexe base. Ainsi, même si l'idée sous-jacente, consistant à associer un complexe abstrait décrivant fidèlement l'homologie et la cohomo-

[58]Pour un espace X connexe par arcs, il existe une équivalence de chaînes entre $S_1(X)$ et $S(X)$ donc leurs homologie et cohomologie sont identiques. L'étude de la transformation de chaînes de $S_1(X)$ vers $K(\pi)$ apprend, avec les hypothèses habituelles d'asphéricité, que $H_q(S_1(X), G) \simeq H_q(K(\pi), G)$, etc.

[59]Cf. [70] p. 485 : "For the purpose of the applications of the complex $K(\pi)$ it is convenient to have an alternative definition based on certain matrices". Cette affirmation ne nous semble néanmoins pas prendre grand sens au vu de leur article. Cette définition du complexe $K(\pi)$ n'a d'ailleurs pas perduré.

logie d'un espace asphérique, est la même chez Eckmann et chez Eilenberg et Mac Lane, elle s'est concrétisée via deux approches bien distinctes.

Nous avons avancé qu'Eckmann était probablement parti de la description du complexe $\bar{K}(\mathfrak{G})$. Il connaissait pourtant l'homologie singulière mais n'a pas exploité le complexe $S_1(X)$ d'Eilenberg. Il semble simplement avoir repris l'idée d'introduire un complexe abstrait, mais est resté dans la voie ouverte par Hopf avec le revêtement universel. Il faut dire également qu'il a préféré demeurer dans le cadre des complexes, ce qui lui a évité la considération nécessaire de l'homologie singulière. Son article met au final en avant des résultats algébriques, en commençant par définir la cohomologie des groupes.

Eilenberg et Mac Lane avaient un point de vue différent de la situation. A la différence d'Eckmann, ils n'avaient pas connaissance de l'article de 1945 de Hopf et de l'utilisation du revêtement universel qui y est faite. L'homologie singulière s'est posée en théorie suffisamment puissante pour attaquer directement les problèmes soulevés par l'article de 1942 de Hopf sans avoir à l'analyser en profondeur et en extraire l'idée de considérer le revêtement universel, tel Freudenthal. Ils ont mis à profit les outils considérés par Eilenberg en vue de l'homologie singulière – outils qu'il a peut-être créés en ayant en même temps l'idée de les adapter à l'étude des relations entre homologie et homotopie – et ont introduit $K(\pi)$ en ayant en tête $S_1(X)$. L'homologie singulière ne leur a pas uniquement servi à étendre leur théorie des polyèdres aux espaces, elle leur a également fourni l'idée du complexe à introduire pour montrer de quelle manière se fait la dépendance des groupes d'homologie d'un espace asphérique en le groupe fondamental. Ce n'est que dans un deuxième temps, en cherchant à décrire d'une manière plus épurée le complexe $K(\pi)$, qu'ils ont mis au point sa version “homogène”.

Les auteurs de [70] ne présentent pas, au contraire de Hopf et Eckmann, la tendance à mélanger les genres en quelque sorte. Bien sûr leur traitement des problèmes est algébrique tandis que leurs résultats sont topologiques mais, au niveau des résultats, leur article parle de topologie sans y mêler l'idée d'homologie ou de cohomologie des groupes. Mac Lane attribue à Eilenberg la maxime “Dig deeper and find out” : il n'y a pas à douter qu'ils ont vu se dégager de leurs travaux la possibilité d'associer des groupes d'homologie et de cohomologie à un groupe donné. Mais ils ont d'abord traité le problème topologique qu'ils s'étaient posé et ensuite ont consacré leurs forces à l'analyse de la cohomologie des groupes, la présentant dans des articles ultérieurs. Il faut dire que pour Mac Lane notamment, le sujet renvoyait, par l'intermédiaire de l'interprétation de la cohomologie en basse dimension, à cette volonté de comprendre l'essence des systèmes de facteurs et les interprétations dont ils étaient susceptibles. Pour ce faire, il fallait bien s'y consacrer pleinement et ne pas les mêler outre mesure aux considérations topologiques de [70].[60]

9.4 La cohomologie des groupes par Eilenberg et Mac Lane

Le rapport [69] et l'article [70] contenaient donc tout ce qu'il fallait pour définir l'homologie et la cohomologie des groupes, recoupant pour l'essentiel ce qu'on retrouve chez Hopf et Eckmann[61]. Mais il faut attendre un article de 1947[62] pour les voir abordées explicitement par Eilenberg et Mac Lane.

Cet article [71], s'il voit le jour du fait d'observations liées à la topologie, est néanmoins purement algébrique. La volonté de généralité observée pousse d'ailleurs les auteurs à considérer le groupe π comme agissant[63] sur le groupe des coefficients G. Les auteurs indiquent d'ailleurs en introduction s'être inspirés pour certains théorèmes du développement en parallèle par Gerhard P. Hoschschild de la cohomologie d'une algèbre, domaine qui leur semble n'avoir aucune application topologique[64]. Les travaux de Hochschild auxquels il est fait référence, publiés en 1945 et 1946, montrent que l'idée de cohomologie s'est abstraite du cadre topologique rapidement, sans se restreindre à l'étude des groupes proposée par les considérations topologiques. Ce fait est un indicateur de la marche en avant de la philosophie de l'Algèbre Moderne ; elle a alors été adoptée par suffisamment de mathématiciens pour que les processus d'abstraction puis de généralisation d'objets apparus dans une branche a priori distincte de l'algèbre se réalisent en un temps très court.

Seule la cohomologie est traitée dans [71]. Ceci est très compréhensible, d'une part parce qu'on peut obtenir l'homologie d'un groupe en utilisant la dualité de Pontrjagin, d'autre part parce que quitte à privilégier l'une des

[60] Cette démarche était d'ailleurs annoncée clairement en introduction, cf. p. 482 : "The development of the algebraic ideas if this paper was purposely limited to the needs of the topological applications."

[61] En incluant le traitement des produits cup et cap, qu'il nous a semblé redondant de détailler.

[62] Cela dit, cette date est trompeuse ! Pour commencer, l'article [71] en question fut soumis en janvier 1946. Mais surtout, les travaux qui y sont développés furent présentés devant la Société Mathématique Américaine (AMS) en novembre 1943, soit la même année que ceux que nous avons analysés dans la section précédente. C'est donc bien dans la lignée immédiate de leur étude des relations entre homotopie et homologie qu'ils se sont attaqués à la cohomologie, même s'ils ont pris du temps pour développer leur théorie.

[63] Le cadre topologique étudié jusque là se retrouve bien sûr en supposant cette action triviale. A noter que le fait d'ajouter cette action de groupe était déjà annoncée dans [70], p. 482.

[64] Cf. [71] p. 51 : "These resultst are apparently not connected with topological applications."

deux théories, il apparaît préférable de se concentrer sur celle qui présente le plus de structure – et la cohomologie peut être munie de produits.

Les fonctions, ou cochaînes, utilisées pour définir la cohomologie d'un groupe π, satisfont une condition d'homogénéité

$$F(xx_0, ..., xx_n) = xF(x_0, ..., x_n),^{65}$$

où x et les x_i sont dans π. L'action considérée en plus par rapport au cadre topologique ne pose aucun problème pour la définition du cobord, et les définitions sont donc totalement analogues à celles que nous avions vues dans le cas où l'action était triviale.

Cette définition des cochaînes correspond à l'approche dite homogène. C'est celle qui a été privilégiée dans le cadre topologique par Eilenberg et Mac Lane mais ils utilisent également une autre approche, dite non homogène, qui leur a été suggérée par André Weil[66]. Les cochaînes non homogènes (notées f) sont en correspondance biunivoque avec les cochaînes homogènes, et cette correspondance se décrit ainsi :

$$F(x_0, x_1, ..., x_n) = x_0 f(x_0^{-1}x_1, x_1^{-1}x_2, ..., x_{n-1}^{-1}x_n),$$

$$f(x_1, ...x_n) = F(1, x_1, x_1x_2, ..., x_1x_2...x_n).$$

Le cobord s'exprime alors de la manière suivante :

$$(\delta f)(x_1, ..., x_{n+1}) = x_1 f(x_2, ..., x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1, ..., x_i x_{i+1}, ..., x_{n+1})$$

$$+(-1)^{n+1} f(x_1, ..., x_n).$$

Eilenberg et Mac Lane donnent encore l'interprétation de la cohomologie en dimensions 0, 1 et 2. C'est essentiellement la même que celle que nous avons vue auparavant chez Eckmann et qu'ils donnaient déjà dans leur article de 1945. Cela dit, ici, l'action de π sur G modifie quelque peu les résultats.

Une 0-cochaîne f revient à la donnée d'un élément g de G. Son cobord s'écrit :

$$(\delta f)(x_1) = x_1 g - g,$$

ce qui signifie qu'une 0-cochaîne est un cobord si et seulement si $xg = g$ pour tout x de π. Le groupe de cohomologie en degré 0, $H^0(\pi, G)$ est donc formé

[65] Cette condition était déjà présente dans [71] mais comme l'action de π sur G était supposée triviale, elle s'écrivait simplement sous la forme $F(xx_0, ..., xx_n) = F(x_0, ..., x_n)$.

[66] Cf. [71] p. 55.

de l'ensemble des éléments g de G sur lesquels π agit trivialement. Dans le cas où l'action de π sur G est triviale, on retrouve $H^0(\pi, G) \simeq G$.

Leur étude montre également que $H^1(\pi, G)$ est isomorphe au quotient du groupe des homomorphismes croisés de π dans G par le sous-groupe des homomorphismes principaux, tandis que $H^2(\pi, G)$ est isomorphe au groupe des extensions de π par G correspondant à l'action donnée de π sur G. Si l'action de π est triviale, $H^2(\pi, G)$ correspond au groupe des extensions centrales de π par G.[67] Pour ce qui est de H^3, ils annoncent en avoir une interprétation, mais la réservent pour un papier ultérieur.

Leur article ne s'arrête bien entendu pas là mais le contenu concret de la suite n'a rien d'essentiel pour notre mémoire. Il n'en ressort aucune application à une théorie autre que la cohomologie elle-même. Eilenberg et Mac Lane introduisent le produit cup, établissent des théorèmes de réduction ramenant le cacul de la cohomologie au calcul de la cohomologie en dimension inférieure, avec un groupe de coefficients bien choisi. Ils donnent une nouvelle façon d'obtenir l'isomorphisme établi par Hopf en 1942 sur le deuxième groupe d'homologie[68] et terminent sur un exemple de calcul des groupes de cohomologie pour les groupes cycliques. Ils alimentent donc dans cet article essentiellement la théorie de la cohomologie des groupes pour elle-même. L'utilité de la cohomologie des groupes en topologie était bien entendu devenue manifeste avec les travaux que nous avons déjà étudiés de Hopf, Freudenthal, Eckmann et Eilenberg & Mac Lane. Mais au niveau de son utilité algébrique, la cohomologie des groupes en reste alors cantonnée à ses interprétations en dimensions 0, 1 et 2.

[67] C'est un point qu'avait également mis en évidence Eckmann dans [59] et qu'Eilenberg et Mac Lane avaient déjà mentionné dans [69] et [70]. Chez eux comme chez Eckmann, il n'est jamais fait mention du multiplicateur de Schur, dont il est pourtant évident qu'il est exactement le deuxième groupe de cohomologie $H^2(G, \mathbb{C}^*)$. C'est assez surprenant venant de Mac Lane car le fait que les systèmes de facteurs se retrouvent dans l'article [204] de Schur a été mentionné dans ses collaborations avec Clifford et Schilling (cf. [156] p. 296 et la note de bas de page 53 p. 353 ; cf. [42] p. 387). Dans son traité *Homology*, Mac Lane jugea d'ailleurs important de préciser en note ([154] p. 137) que le multiplicateur de Schur n'est rien d'autre qu'un deuxième groupe de cohomologie. Si le travail de Schur sur les représentations projectives présente une occurrence, semble-t-il la plus ancienne, de ce que l'on voit aujourd'hui comme le deuxième groupe de cohomologie, en aucun cas son travail n'était assez connu ni jugé important au moment de la naissance de la cohomologie des groupes pour que le multiplicateur soit interprété en termes cohomologiques.

[68] Le deuxième groupe d'homologie à coefficients entiers apparaissant en fait comme le groupe des caractères de $H^2(\pi, \mathbb{R}\mathrm{mod}\ 1)$.

9.5 La reformulation cohomologique du problème des extensions

Au moment où Eilenberg et Mac Lane font le lien entre cohomologie en basse dimension et extension de groupes, la théorie des extensions de groupes n'est pas un sujet très vaste. Comme nous avons pu le voir, la bibliographie sur le sujet est alors restreinte et sporadique dans le temps.

Chez Eilenberg et Mac Lane ([70], [71]) comme chez Eckmann ([59]), on trouve une interprétation simple du deuxième groupe de cohomologie $H^2(\pi, G)$ d'un groupe π à coefficients dans un groupe abélien G. Chaque extension de G par π[69] définit en effet, du fait de l'action de π sur G, un système de facteurs (et même tout un ensemble de systèmes de facteurs selon les choix de représentants des éléments de π dans l'extension) qui se trouve être un 2-cocycle. C'est le point clé permettant d'établir que $H^2(\pi, G)$ est isomorphe au groupe des extensions de G par π réalisant une action donnée de π sur G.[70]

Cette interprétation se cantonnait néanmoins au cas d'une extension par un groupe abélien. Eilenberg et Mac Lane cherchèrent bien entendu à améliorer la compréhension des extensions par un groupe quelconque, en utilisant la vision cohomologique. Celle-ci se fait à l'aide du groupe de cohomologie en dimension 3 dont ils avaient identifié tôt[71] qu'il apparaissait déjà, implicitement, dans les travaux de Teichmüller.

Ils dédièrent la deuxième partie ([72]) de leur *Cohomology Theory in Abstract Groups* à l'étude spécifique des extensions à l'aide d'un groupe non abélien. Dans cet article, ils font souvent référence au travail de Baer, dont ils retrouvent certains résultats. Par contre, si la bibliographie mentionne Hall [100] et Turing [222], ils ne sont pas cités dans l'article lui-même.

Cette contribution est essentiellement d'ordre théorique. Elle explique de quelle manière la cohomologie code la possibilité d'avoir une extension, le nombre d'extensions possibles, etc. Mais il n'y est donné aucune application, si ce n'est pour le cas où G est réduit à l'identité, et l'on n'y voit aucune construction effective d'extensions comme cela avait pu être le cas dans les travaux sur les extensions de groupes que nous avons étudiés dans le chapitre 4.

[69] Eilenberg et Mac Lane parlent eux d'"extension de π par G" mais pour ne pas tout mélanger nous continuons avec la convention adoptée par Schreier.

[70] Le fait de considérer en contexte une action de π sur G apparaît pour la première fois dans [71]. Dans [69], [70] et [59], l'action de π sur G était supposée triviale et ce qui en résultait était le groupe des classes d'équivalence d'extensions centrales de G par π.

[71] Dès 1943, dans [69].

Le problème posé est donc, étant donné deux groupes quelconques K et Q, de décrire l'ensemble des extensions de K par Q. Dire que E est une extension de K par Q, c'est dire qu'il existe un morphisme surjectif $\phi : E \to Q$ dont K est le noyau. Comme nous l'avons déjà vu précédemment, l'extension détermine un morphisme[72] $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)/\mathrm{Int}(K)$. En outre, tout automorphisme intérieur de K valant l'identité sur le centre G de K, tout morphisme θ induit un morphisme $\theta_0 : Q \to \mathrm{Aut}(G)$; on a donc une action de Q sur G.

En conséquence, Eilenberg et Mac Lane reformulent le problème en les termes suivants. Etant donné un groupe Q, un "Q-noyau" (K, θ) est défini comme la donnée d'un groupe K et d'un morphisme $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)/\mathrm{Int}(K)$. Le problème consiste à déterminer quand un "Q-noyau" provient d'une extension de K par Q. Outre le groupe Q fixé au départ, est également fixé un couple (G, θ_0), où θ_0 est une action de Q sur G. Il sera exigé que tous les Q-noyaux considérés soient tels que :

- G est le centre de K ;
- θ induit $\theta_0 : Q \to \mathrm{Aut}(G)$.[73]

En fixant initialement un groupe abélien G qui devra jouer le rôle du centre de K, Eilenberg et Mac Lane projettent de réduire le problème à celui des extensions d'un groupe abélien, comme l'avait effectué Baer. Ils s'octroient également la possibilité de faire intervenir les concepts de la cohomologie des groupes, pour laquelle les coefficients doivent être pris dans un groupe abélien.

De même que Baer et Hall, Eilenberg et Mac Lane entendent considérer le groupe des extensions. Mais ils ne se contentent pas d'introduire un produit sur les extensions ; ils en définissent d'abord un sur les Q-noyaux.

Le produit de deux noyaux (K_1, θ_1) et (K_2, θ_2) de même centre G consiste en une paire (K, θ) où $K = (K_1 \times K_2)/S$, S étant le sous-groupe distingué de $K_1 \times K_2$ formé de l'ensemble des paires (g, g^{-1}), $g \in G$. Le groupe K contient le sous-groupe des classes $(g, 1)S$ qui, vu que $(g, 1) \equiv (1, g) \bmod S$, peut être identifié à G, et est bien dans le centre de K. En outre si, pour tout x de Q, on choisit deux automorphismes $\alpha_1 \in \theta_1(x)$ et $\alpha_2 \in \theta_2(x)$, alors $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2$ est un automorphisme de $K_1 \times K_2$ tel que $\alpha(S) \subset S$, donc de K, dont la restriction à G vaut θ_0. La classe $\theta(x) = \alpha\mathrm{Int}(K)$ ainsi déterminée se trouve bien indépendante des choix de α_1 et α_2 et on peut vérifier que $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)/\mathrm{Int}(K)$ est un morphisme. Ainsi (K, θ) est un noyau de

[72] Celui que Baer avait nommé "caractère collectif".

[73] On pourra remarquer que la tactique adoptée par Baer après restriction au cas abélien coïncide avec celle proposée ici par Eilenberg et Mac Lane, en posant $K = G$.

centre G et cette construction permet de définir un G-produit de noyaux :

$$(K_1, \theta_1) \otimes (K_2, \theta_2) = (K, \theta).$$

Pour obtenir une loi associative et commutative, il faut considérer les Q-noyaux modulo G-équivalence : (K, θ) et $(K^{'}, \theta^{'})$ sont dits G-équivalents, ce qu'on note $(K, \theta) \cong (K^{'}, \theta^{'})$, si et seulement s'il existe un isomorphisme $\sigma : K \to K^{'}$ tel que :

– $\forall g \in G,\ \sigma g = g$;
– $\forall x \in Q,\ \forall \alpha \in \theta(x),\ \sigma\alpha\sigma^{-1} \in \theta^{'}(x)$.

Le noyau $G = (G, \theta_0)$ est le neutre pour le G-produit : $(K, \theta) \otimes G \cong (K, \theta)$.

L'ensemble des Q-noyaux, considérés à G-équivalence près, forme ainsi un monoïde. En ajoutant une notion supplémentaire, celle de similitude, on peut en faire un groupe abélien. Celui-ci est étroitement lié aux extensions.

Un Q-noyau (K, θ) est dit "extensible" s'il est le noyau d'un morphisme $\phi : E \to Q$; c'est-à-dire non seulement que $K = \mathrm{Ker}(\phi)$ mais aussi que tout automorphisme de K obtenu par conjugaison par un élément e de E appartient à la classe $\theta(\phi e)$. Le résultat essentiel vis-à-vis de la structure de groupe des Q-noyaux est que le G-produit de deux noyaux extensibles est extensible. Ceci s'obtient en définissant le produit de deux extensions selon un procédé similaire à celui de Baer.

Si (E_1, ϕ_1), resp. (E_2, ϕ_2), est une extension de (K_1, θ_1), resp. (K_2, θ_2), par Q, on considère le sous-groupe R de $E_1 \times E_2$ formé de l'ensemble des couples (e_1, e_2) avec $\phi_1 e_1 = \phi_2 e_2$, et l'on définit le morphisme $\phi^{'} : R \to Q$ par $\phi^{'}(e_1, e_2) = \phi_1 e_1 = \phi_2 e_2$. Le sous-groupe distingué $S^{'}$ de R consistant en les couples (g, g^{-1}), $g \in G$, est inclus dans le noyau de $\phi^{'}$ donc $\phi^{'}$ induit un morphisme surjectif de $E = R/S^{'}$ dans Q. Le couple (E, ϕ) ainsi obtenu est appelé le G-produit des deux extensions données :

$$(E_1, \phi_1) \otimes (E_2, \phi_2) = (E, \phi).$$

Il se trouve que le couple (E, ϕ) admet précisément pour noyau le produit des noyaux $(K_1, \theta_1) \otimes (K_2, \theta_2) = (K, \theta)$. En outre, il est possible d'associer à tout Q-noyau (K, θ) un noyau (K^*, θ^*) tel que $(K, \theta) \otimes (K^*, \theta^*)$ est extensible. Ce résultat est analogue au résultat de la théorie des algèbres associatives stipulant que le produit de Kronecker d'une algèbre à division par son opposée[74] est une algèbre totale de matrices.

[74] Une algèbre A' est dite opposée ou réciproque de A s'il existe une bijection entre les éléments x, y,... de A et les éléments x', y',... de A telle que $x + y$, xy, αx correspondent à $x' + y'$, $y'x'$ et $\alpha x'$. Cf. par exemple [53] p. 21. Le résultat évoqué ici est également l'analogue du résultat sur les "groupes" établi par Brauer, et mentionné en 3.3.1, selon lequel $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}^{'}$ est K-rationnel.

Deux noyaux (K_1, θ_1) et (K_2, θ_2) sont dits “similaires”, ce qu'on note $(K_1, \theta_1) \sim (K_2, \theta_2)$, s'il existe des noyaux extensibles (L_1, ψ_1) et (L_2, ψ_2) tels que :

$$(K_1, \theta_1) \otimes (L_1, \psi_1) \cong (K_2, \theta_2) \otimes (L_2, \psi_2).$$

La similitude respecte la G-équivalence. Le produit sur les noyaux déjà considéré un peu plus haut induit un produit sur les classes de similitude $[K, \theta]$ associées aux noyaux (K, θ), défini de la manière suivante :

$$[K_1, \theta_1] \otimes [K_2, \theta_2] = [(K_1, \theta_1) \otimes (K_2, \theta_2)].$$

Etant donnée la propriété vérifiée par (K^*, θ^*), la classe $[K^*, \theta^*]$ apparaît comme l'inverse de la classe $[K, \theta]$. Cette construction permet donc d'affirmer[75] :

“the similarity classes of Q-kernels (K, θ) with fixed center G form an abelian group under the G-multiplication of classes.”

Les Q-noyaux apparaissent alors munis d'une relation d'équivalence, de similitude et d'un produit qui permettent de définir une structure simple, celle de groupe abélien, qui est reliée au fait de pouvoir réaliser un noyau dans une extension. Les outils de la cohomologie vont permettre de décrire précisément ce lien.

Lorsqu'on considère un Q-noyau, on ne fait aucun choix d'élément dans les classes $\theta(x)$. Comme on l'a déjà vu à plusieurs reprises précédemment, c'est lorsque s'effectuent des choix de représentants qu'apparaissent les systèmes de facteurs. Soit donc donné un noyau (K, θ) et sélectionné arbitrairement un automorphisme $\alpha(x)$ de K dans chaque classe $\theta(x)$, avec la seule exigence que $\alpha(1) = 1$. Comme $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)/\mathrm{Int}(K)$ est un morphisme, l'élément $\alpha(x)\alpha(y)\alpha(xy)^{-1}$ doit être, pour tous x, y dans Q, un automorphisme intérieur de K. On peut donc choisir (le choix se fait modulo G) dans K des éléments $h(x, y)$, qui vérifieront nécessairement $h(1, y) = h(x, 1) = 1$, tels que :

$$\alpha(x)\alpha(y) = C[h(x, y)]\alpha(xy),$$

$C[h(x, y)]$ désignant l'automorphisme intérieur obtenu par conjugaison par $h(x, y)$. Par associativité, l'égalité $(\alpha(x)\alpha(y))\alpha(z) = \alpha(x)(\alpha(y)\alpha(z))$ doit être vérifiée, ce qui entraîne, au vu de la relation précédente :

$$C[h(x, y)h(xy, z)] = C[(\alpha(x)(h(y, z)))h(x, yz)].$$

Mais si les deux quantités $h(x, y)h(xy, z)$ et $(\alpha(x)(h(y, z)))h(x, yz)$ engendrent le même automorphisme intérieur, c'est qu'elles ne diffèrent que d'un élément

[75] Cf. [72], theorem 6.1. p. 331.

du centre G de K. Il existe donc des éléments, notés $f_3(x, y, z)$, dans G, tels que :

$$(\alpha(x)(h(y, z)))h(x, yz) = f_3(x, y, z)h(x, y)h(xy, z).$$

On obtient ainsi en f_3 une cochaîne, normalisée[76] car la condition $\alpha(1) = 1$ entraîne $f_3(1, y, z) = f_3(x, 1, z) = f_3(x, y, 1)$.

Un calcul direct permet de montrer que f_3 est un cocycle. Il apparaît néanmoins que f_3 a été obtenu suite à deux choix : celui de α et celui de h. Eilenberg et Mac Lane montrent qu'opérer tous les choix possibles sur α et h revient à parcourir la classe de cohomologie à laquelle appartient f_3. Ceci se synthétise de la manière suivante[77] :

"Each Q-kernel (K, θ) determines in invariant fashion a three-dimensional cohomology class $\{f_3\} = F_3(K, \theta)$ of Q over the center G of K. Q-equivalent kernels determine the same cohomology class."

Eilenberg et Mac Lane ont donc réussi à associer une classe de cohomologie 3-dimensionnelle à tout Q-noyau. La question se pose toujours de déterminer si un Q-noyau provient bien d'une extension. Le fait de pouvoir maintenant utiliser les systèmes de facteurs doit normalement aider à cela. C'est ce qui ressort du théorème 8.1.[78] :

"The kernel (K, θ) is extendible if and only if $F_3(K, \theta) = 1$."

Comme il apparaît dans la démonstration de ce théorème, si un noyau (K, θ) détermine la classe de cohomologie triviale, alors le groupe E constitué des couples (k, x), $k \in K$, $x \in Q$, et muni de la loi de composition $(k, x)(l, y) = (k[\alpha(x)(l)]h(x, y), xy)$ est bien une extension de K par Q réalisant le noyau (K, θ). Mais si f_3 n'est pas cohomologue à l'identité, alors il s'oppose au fait que θ puisse être réalisé dans une extension. La cochaîne f_3 est maintenant communément qualifiée d'"obstruction" ; ce n'est donc que si elle s'évanouit (modulo les cobords), qu'elle ne s'oppose pas à l'extension.

[76]Eilenberg et Mac Lane avaient déjà introduit cette notion dans [71], pp. 61-63. Une cochaîne est dite normalisée si $f(x_1, ..., x_n) = 1$ dès lors qu'un des x_i vaut 1. Les considérer permet de simplifier les calculs et est d'autant plus pertinent que :

- tout cocycle est cohomologue à un cocycle normalisé ;
- toute cochaîne normalisée qui est un cobord est le cobord d'une chaîne normalisée.

Ces deux propriétés assurent que le quotient du groupe des cocycles normalisés par le sous-groupe des cobords normalisés est isomorphe au groupe de cohomologie défini classiquement. On peut donc se contenter d'étudier les cochaînes normalisées pour déterminer la cohomologie.

[77]Cf. [72], theorem 7.1. p. 333.

[78]*Ibid.*

Si tout Q-noyau détermine une classe de cohomologie 3-dimensionnelle, on peut se demander si la réciproque est vraie : Eilenberg et Mac Lane y répondent affirmativement, par un argument similaire à celui utilisé pour établir le théorème d'Artin sur l'existence du "Zerfällungsgruppe". Ils en arrivent ainsi à établir le principal résultat de leur article[79], à savoir :

"If Q operates on the abelian group G, the group of similarity classes of Q-kernels (K, θ) with center G is isomorphic to the three-dimensional cohomology group $H^3(Q, G)$."

L'isomorphisme en question est le suivant : $[K, \theta] \to F_3(K, \theta)$. On a en effet bien $F_3[(K_1, \theta_1) \otimes (K_2, \theta_2)] = F_3(K_1, \theta_1) F_3(K_2, \theta_2)$ et $K_1 \sim K_2 \Leftrightarrow F_3 K_1 = F_3 K_2$.

On peut donc décrire l'ensemble des Q-noyaux à l'aide d'informations de nature cohomologique. Il reste encore à décrire l'ensemble des extensions réalisant un noyau donné. La réponse est déjà connue lorsque $K = G$:[80] l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de G par Q est alors isomorphe à $H^2(Q, G)$ en tenant compte de l'action donnée de Q sur G.

Deux extensions (E_1, ϕ_1) et (E_2, ϕ_2) de Q, associées au même noyau (K, θ), sont dites (Q, K)-équivalentes s'il existe un isomorphisme $\tau : E_1 \to E_2$ dont la restriction à K est l'identité et tel que $\phi_2 \tau = \phi_1$. Eilenberg et Mac Lane parviennent à établir qu'étant donné un noyau extensible (K, θ), les classes d'extensions (Q, K)-équivalentes (E, ϕ) de ce noyau par Q sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^2(Q, G)$. Ces classes sont donc en correspondance biunivoque avec les classes d'extensions (Q, G)-équivalentes du centre G de K par Q. La bijection peut d'ailleurs être explicitée. Si (E, ϕ) est une extension réalisant (K, θ), l'application $(D, \eta) \to (E, \phi) \otimes (D, \eta)$, où (D, η) parcourt l'ensemble des extensions de Q par G, induit la bijection désirée entre les classes d'extensions de G par Q et les classes d'extensions de (K, θ) par Q.

On remarque bien l'aspect essentiel du centre G de K, qui est fixé au départ des considérations et se manifeste dans les isomorphismes ou bijections mis en évidence avec des groupes de cohomologie (via $H^2(Q, G)$ et $H^3(Q, G)$). Bien que la démarche d'Eilenberg et Mac Lane ne soit pas totalement similaire à celle de Baer, ils retrouvent la possibilité de réduire le problème de l'extension à celui de l'extension d'un groupe abélien. En effet, si l'on fait la synthèse de leurs résultats, se dégagent les points suivants :

- tout noyau (K, θ) extensible détermine la classe de cohomologie 3-dimensionnelle triviale ;

[79] *Ibid.* p. 336.
[80] Cf. [71].

– on sait construire une extension E de K réalisant la classe de cohomologie 3-dimensionnelle triviale (il s'agit de l'ensemble des couples (k, x) muni de la loi $(k, x)(l, y) = (k[\alpha(x)(l)]h(x, y), xy))$;
– toutes les classes d'extensions de (K, θ) peuvent être obtenues en considérant l'ensemble des $(E, \phi) \otimes (D, \eta)$, où (D, η) parcourt l'ensemble des extensions de G (extensions dites "abéliennes").

9.6 Autre utilisation du H^3

Comme nous l'avons évoqué en 3.4, il existait dans la littérature mathématique, avant la mise au point de la cohomologie des groupes, une relation définissant un 3-cocycle. Celle-ci avait été mise au jour par Oswald Teichmüller dans l'article [220] de 1940, en lien avec le problème de la détermination d'algèbres simples sur P, de centre une extension algébrique galoisienne Z de P, pour lesquelles tout élément de $Aut_P(Z)$ peut être prolongé en un automorphisme de A.[81]

Mac Lane connaissait ce travail de Teichmüller où apparaissait un système de facteurs d'un type inconnu jusqu'alors. Dès les premières publications d'Eilenberg et Mac Lane sur l'homologie et la cohomologie des groupes, le travail de Teichmüller est cité, et il devient vite manifeste qu'un des buts de leur collaboration sera l'interprétation des résultats de Teichmüller à l'aide de la cohomologie. Ils la mettent au point dans un papier ([73]) soumis aux *Transactions of the American Mathematical Society* en mai 1947. Ce papier est à l'origine d'une branche de la cohomologie des groupes, la cohomologie galoisienne, qui utilise les méthodes cohomologiques pour étudier l'action d'un groupe de Galois sur certains groupes.

Dans [73], les auteurs introduisent la notion de "cocycle de Teichmüller", en fait un 3-cocycle associé à une algèbre du type étudié par Teichmüller. Précisément, soit P un corps fixé et N une extension algébrique galoisienne de P, de groupe de Galois Q. Les algèbres considérées par Teichmüller, c'est-à-dire les P-algèbres simples, de centre N, et telles que tout élément de $Aut_P(N)$ se prolonge en un élément de $Aut_P(A)$, sont dites Q-normales. Eilenberg et Mac Lane parviennent, par un raisonnement similaire à celui mis au point pour les extensions de groupes, à associer à toute algèbre Q-normale un élément de $Z^3(Q, N)$. Ce qu'ils obtiennent comme analogue au résultat principal de Teichmüller est un morphisme injectif

$$B_Q(N)/B(N, P) \to H^3(Q, N),$$

[81] Voir l'annexe A.

où $B_Q(N)$ désigne l'ensemble des classes d'algèbres Q-normales et $B(N, P)$ le sous-groupe des classes d'algèbres obtenues par extension scalaire[82] de P à N. L'image de ce morphisme est le sous-groupe de $H^3(Q, N)$ formé des classes de cohomologie de 3-cocycles que l'on peut "relever"[83].

Le point fort du travail d'Eilenberg et Mac Lane, comparativement à l'approche de Teichmüller, est d'avoir identifié le fait qu'ils pouvaient travailler avec les cochaînes normalisées[84] qui expriment la même cohomologie que les cochaînes classiques. Ceci simplifie grandement leurs calculs, qui n'ont plus rien à voir avec la machinerie complexe mise en œuvre par Teichmüller.

Avec cette utilisation de la cohomologie en dimension 3, Eilenberg et Mac Lane ont fini d'interpréter les quelques résultats de cohomologie en basse dimension que l'on pouvait trouver dans la littérature jusqu'aux années 1940. Bien entendu, ils espéraient que des interprétations simples de certains résultats des champs classiques de l'algèbre et de l'arithmétique pourraient voir le jour à l'aide de la cohomologie des groupes en des dimensions autres que 0, 1, 2 et 3. Mais ce ne fut pas le cas.

---

[82]c'est-à-dire que $A = B \otimes_P N$, où B est une algèbre centrale simple sur P.

[83]Supposons que l'on ait une extension galoisienne K/P de groupe de Galois G, où $K \supset N$. Pour tout 3-cocycle t de $Z^3(G, K)$, on peut définir un 3-cocyle Λt de $Z^3(Q, N)$ par $(\Lambda t)(\alpha, \beta, \gamma) = t(\alpha_{|N}, \beta_{|N}, \gamma_{|N})$. S'il existe une extension galoisienne K tel qu'un f élément de $Z^3(Q, N)$ vérifie $f = \Lambda t$ pour un certain élément t de $Z^3(G, K)$, alors on dit qu'on peut relever f.

[84]Voir la note 76.

Chapitre 10

Conclusion

Si la cohomologie des groupes est clairement une théorie algébrique, sa naissance résulte essentiellement du développement de la topologie. L'article de 1942 de Hopf est le principal coup de pioche menant à la pose, menée indépendamment par plusieurs protagonistes, des fondations de la cohomologie des groupes. Après cet article, Hopf développa l'homologie des groupes et Eckmann, dans l'esprit de son maître, la cohomologie – ce qui était un accomplissement inévitable étant donné l'existence de théories cohomologiques en topologie. Eilenberg et Mac Lane accomplirent la même chose mais avaient à disposition leurs propres techniques, et l'on peut quasiment considérer que la teneur concrète de l'article de Hopf et de son supplément de 1943 leur fut accessoire. Il leur suffisait de savoir que la compréhension algébrique des résultats topologiques de Hurewicz avait été acquise en dimension 2 et, de même que Hopf, de concevoir l'espoir d'atteindre une compréhension similaire en dimension quelconque.

Eilenberg et Mac Lane avaient en effet eux-mêmes mis le doigt sur les interprétations algébriques possibles de résultats topologiques, via leur étude du lien entre extensions de groupes et homologie. De nombreux mécanismes de détermination algébrique de propriétés topologiques leur parurent alors abordables, et il ne leur manquait qu'une description adéquate de la situation topologique mise en jeu par les résultats de Hurewicz pour les expliquer tout à fait. Les compétences topologiques d'Eilenberg leur fournirent la clé, incarnée par le complexe singulier. Mais la création de la cohomologie des groupes n'est au fond qu'une des multiples réalisations résultant de leur collaboration.

Eilenberg et Mac Lane tiraient une part de leur motivation des connaissances algébriques de Mac Lane et de son questionnement au sujet des systèmes de facteurs. La figure de Mac Lane apparaît comme un condensé des enjeux historiques de la naissance de la cohomologie des groupes. D'une part, il connaissait les diverses théories algébriques mettant en jeu les systèmes de facteurs ; ceux-ci le fascinaient, il désirait mieux les comprendre et, si possible, les généraliser. D'autre part, il avait les compétences topologiques nécessaires pour assimiler les travaux de Hurewicz, de Hopf et d'Eilenberg, et était enclin à contribuer au mouvement d'algébrisation de la topologie. En première approximation, on aurait donc pu résumer la naissance de la cohomologie des groupes à la manière dont elle s'est produite chez le seul Mac Lane. Cela dit, les réflexions de Mac Lane autour des systèmes de facteurs étaient étrangères à Hopf, ce qui montre que les occurrences antérieures à 1940 de relations cohomologiques en basse dimension dans certaines théories algébriques n'ont pas été nécessaires à l'élaboration de la cohomologie des groupes.

Ce qui peut apparaître surprenant dans la genèse de cette théorie est que, naïvement, on s'attend à ce que le désir d'une description algébrique d'une situation topologique se justifie par la possibilité d'obtenir, à partir de résultats algébriques (en particulier sur les groupes), des informations de nature topologique. Or ce n'est pas ce qui s'est produit pour la cohomologie des groupes, et ceci est perceptible dès le départ. Dans l'ensemble, les résultats topologiques sont les plus simples à établir, ce qui permet donc un transfert plus facile dans le sens topologie → algèbre que dans le sens inverse. La volonté originelle de compréhension algébrique de Hopf, Eilenberg ou Mac Lane, relève donc plutôt d'une position philosophique que d'un véritable intérêt effectif. Pour eux, comprendre un résultat, c'est le comprendre algébriquement.

Le fait que des mathématiciens aient eu ces convictions philosophiques explique qu'une théorie telle que la cohomologie des groupes ait pu voir le jour. L'essor de l'algèbre moderne est donc très important pour la naissance de la cohomologie des groupes. Les principaux protagonistes de la genèse de la cohomologie des groupes que nous avons retenus ont tous été directement influencés par Noether ou par Hopf, un de ses plus fidèles partisans, ou ont été marqués par la philosophie de Göttingen et le type d'algèbre qui s'y pratiquait. Néanmoins l'algébrisation de la topologie ne peut être ramenée à un mouvement conscient des mathématiciens en ce sens, de même que l'on ne peut dire que les mathématiciens ont voulu créer la cohomologie des groupes – alors que, au contraire, une volonté explicite et consciente était bien à l'œuvre pour l'adaptation de la théorie du corps de classes aux extensions non abéliennes. La naissance de la cohomologie des groupes résulte, avant tout, de mouvements spontanés régis par la logique interne du développement des mathématiques.

Annexe A

Etude de l'article *Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation* $\xi_{\lambda,\mu,\nu}\xi_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi^{\lambda}_{\mu,\nu,\pi} = \xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}$ d'Oswald Teichmüller.

Le propos est ici un compte-rendu détaillé de l'article *Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation* $\xi_{\lambda,\mu,\nu}\xi_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi^{\lambda}_{\mu,\nu,\pi} = \xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}$ d'Oswald Teichmüller, paru en 1940 dans le cinquième volume de la revue allemande *Deutsche Mathematik.* Nous avons évoqué cet article au cours de la thèse, notamment en 3.4 et 9.6, car il présente la première occurrence d'une relation de cohomologie des groupes en dimension 3. Comme nous l'avons déjà précisé auparavant, nous ne cherchons pas ici à faire une analyse spécifique, mais juste à donner accès à un article peu connu et ardu. Cela peut également permettre de mettre en valeur les simplifications opérées par Eilenberg et Mac Lane dans leur définition de la cohomologie des groupes.

Le problème général abordé par Teichmüller dans cet article est l'analogue, dans le cas non commutatif, du problème de la théorie de Galois. Il s'agit en effet de l'étude du rapport entre les sous-algèbres d'une algèbre associative K sur un corps P et les sous-groupes du groupe des automorphismes de K dont la restriction à P est l'identité (appelés plus synthétiquement "automorphismes de K sur P"), ensemble que nous noterons dans toute la suite

$Aut_P(K)$. Plus précisément, Teichmüller veut "déterminer toutes les algèbres intermédiaires X ayant la propriété que tout élément de K laissé fixe par tous les automorphismes de K/P qui laissent fixes les éléments de X est dans X."[1]

On peut rendre le problème précédent plus clair en adoptant un formalisme moderne. Notons $\mathcal{E} = \{P\text{-algèbres } X, P \subset X \subset K\}$, $\mathcal{H} = \{N$ sous-groupes de $Aut_P(K)\}$,

$$G: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ X & \longmapsto & \{\varphi \in Aut_P(K), \varphi_{|X} = id_X\} \end{array}, \quad I: \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ N & \longmapsto & \{x \in K, \forall \varphi \in N, \varphi(x) = x\} \end{array}.$$

Avec ces dernières notations, l'objectif de Teichmüller est de déterminer les X de $\mathcal{E}$ tels que $I \circ G(X) = X$.

Si l'on prend pour K un corps qui est une extension galoisienne de P alors les X répondant au problème de Teichmüller sont – comme le donne la correspondance de Galois – les extensions de corps intermédiaires entre P et K. En outre les N tels que $G \circ I(N) = N$ sont les sous-groupes de $Aut_P(K) = Gal(K/P)$.

Si K est une extension finie mais non nécessairement galoisienne de P, Teichmüller introduit le corps $\mathcal{I} = I \circ G(P) = \{x \in K, \forall \varphi \in Aut_P(K), \varphi(x) = x\}$. Les X apparaissent alors clairement comme étant des surcorps de $\mathcal{I}$. Teichmüller affirme sur la base d'un résultat provenant d'un article antérieur[2] que K est une extension galoisienne et séparable de $\mathcal{I}$. S'étant ramené à une extension galoisienne, il peut évidemment conclure que les X sont les corps intermédiaires entre $\mathcal{I}$ et K et que les N sont les sous-groupes de $Gal(K/\mathcal{I})$.

Le cas général traité par Teichmüller est celui d'une algèbre[3] à division K sur un corps P, de centre Z. Notant toujours $\mathcal{I} = \{x \in K, \forall \varphi \in Aut_P(K), \varphi(x) = x\}$, on a les inclusions de corps $P \subset \mathcal{I} \subset Z$, la deuxième inclusion résultant de ce que Z est l'ensemble des éléments de K fixés par l'ensemble des automorphismes intérieurs de K, qui est un sous-ensemble de $Aut_P(K)$. Teichmüller caractérise $\mathcal{I}$ comme étant le plus petit corps intermédiaire entre P et Z ayant les propriétés :

- Z est une extension galoisienne et séparable de $\mathcal{I}$;
- tout automorphisme de Z sur $\mathcal{I}$ se prolonge en un automorphisme de K (sur $\mathcal{I}$).

[1] Cf. p.139 : "Wir beschäftigen uns hier nur mit der ersten Aufgabe, alle in K enthaltenen P enthaltenden Schiefkörper X mit der Eigenschaft zu finden, daß jedes Element von K, das bei allen X elementweise fest lassenden Automorphismen von K/P fest bleibt, schon in X liegt."

[2] Cf. [219].

[3] qui, comme toutes les algèbres considérés dans cette thèse, est de rang fini sur le corps de base.

Pouvant considérer $\mathcal{I}$ comme nouveau corps de base de l'algèbre K, Teichmüller décide dans la suite de considérer P comme étant identique à $\mathcal{I}$, donc de supposer $P = I \circ G(P)$.

Teichmüller répond au problème qu'il s'est posé par l'intermédiaire de la proposition suivante :

Soit K une algèbre à division de rang fini sur un sous-corps P de son centre Z. On suppose $I \circ G(P) = P$. Alors, pour toute algèbre à division X intermédiaire entre P et K, on a $I \circ G(X) = X$.

La démonstration de cette proposition utilise de manière cruciale le fait de prolonger un automorphisme de Z sur $\Xi \cap Z$ (où Ξ est le centre de X) en un automorphisme de K sur X, ce qui est rendu possible par l'hypothèse que tout automorphisme de Z sur P se prolonge en un automorphisme de K.

Les résultats acquis jusqu'à ce point de l'article incitent naturellement Teichmüller à considérer maintenant une algèbre A simple sur un corps P, de centre Z, et à se demander si toute algèbre simple X sur P, contenant l'identité de A et incluse dans A, vérifie $I \circ G(X) = X$.

Une telle propriété sur les sous-algèbres simples de A n'est envisageable que si l'on a $I \circ G(P) = P$, donc – d'après la caractérisation de $\mathcal{I}$ donnée plus haut – si Z est une extension galoisienne et séparable de P et si tout élément de $Aut_P(Z)$ se prolonge en un élément de $Aut_P(A)$.

Teichmüller a ainsi identifié les propriétés pertinentes que doit posséder une algèbre simple afin de satisfaire une correspondance de Galois. Du point de vue de notre étude, les points les plus intéressants de l'article de Teichmüller sont à venir. En effet, il focalise à présent son attention sur la description d'algèbres simples A sur un corps P, dont le centre Z est galoisien et séparable sur P et telles que tout élément de $Aut_P(Z)$ se prolonge en un élément de $Aut_P(A)$ et, comme nous allons le constater, cette propriété de prolongement amène une discussion de relations de type cohomologique. L'analyse des propriétés de ces algèbres consitue véritablement le cœur de l'article de Teichmüller, à tel point que cette étude semble dépasser l'intérêt suscité en lui-même par l'établissement d'une correspondance de Galois non commutative.

Teichmüller affirme qu'il existe un corps de décomposition S de l'algèbre simple A, galoisien et séparable sur Z ainsi que sur P. Comme Z est galoisien sur P, $\mathcal{N} := Aut_Z(S)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G} = Gal(S/P)$.

L'algèbre A est donc semblable[4] à un "produit croisé"[5] comme suit :

$$A \sim A^{'} = (\alpha_{\sigma,\tau}, S, \mathcal{N}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{N}} S u_\sigma,$$

i) $u_\sigma \xi = \xi^\sigma u_\sigma$, $\xi \in S$, $\sigma \in \mathcal{N}$;

ii) $u_\sigma u_\tau = \alpha_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}$; $\alpha_{\sigma,\tau} \in S \setminus \{0\}$;

iii) $\alpha_{\rho,\sigma}\alpha_{\rho\sigma,\tau} = \alpha^{\rho}_{\sigma,\tau}\alpha_{\rho,\sigma\tau}$.

Le fait pour une P-algèbre A de centre Z que Z soit une extension galoisienne et séparable de P et que tout élément de $Aut_P(Z)$ se prolonge en un élément de $Aut_P(A)$ est une propriété indépendante de la classe. Cette propriété doit donc s'exprimer via des relations sur le système de facteurs $(\alpha_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau}$ permettant de décrire $A^{'}$ (qui est semblable à A) et la recherche de ces relations constitue dès lors l'essentiel de la suite de l'article.

Teichmüller raisonne par condition nécessaire. Si un automorphisme λ de Z sur P (donc un élément de $\mathcal{G}/\mathcal{N}$) se prolonge à A alors on peut également le prolonger à $A^{'}$. Il existe même un prolongement v_λ de λ à $A^{'}$ stabilisant S.[6] La restriction de v_λ à S est alors un automorphisme de S coïncidant avec λ sur Z donc est un représentant dans $\mathcal{G}$ de l'élément λ de $\mathcal{G}/\mathcal{N}$.

En appliquant v_λ aux égalités $u_\sigma \xi = \xi^\sigma u_\sigma$ et $u_\sigma \xi^{v_\lambda^{-1}} = \xi^{\sigma v_\lambda^{-1}} u_\sigma$ données par **i)**, on montre aisément que la quantité $\beta_{\lambda,\sigma} := u_\sigma^{v_\lambda} u_{v_\lambda \sigma v_\lambda^{-1}}$ vérifie $\beta_{\lambda,\sigma} = \xi^{v_\lambda \sigma v_\lambda^{-1}} \beta_{\lambda,\sigma} (\xi^{v_\lambda \sigma v_\lambda^{-1}})^{-1}$. Par conséquent, $\beta_{\lambda,\sigma}$ commute avec tout élé-

[4] On peut définir une relation d'équivalence sur les algèbres de la manière suivante. Le théorème de Wedderburn (cf. [234], p. 99) affirme que toute algèbre simple sur un corps P est P-isomorphe à $M_n(D)$, où D est une algèbre à division de dimension finie sur P, n étant unique et D unique à isomorphisme près. Deux P-algèbres centrales simples A et B sont dites semblables (on note $A \sim B$) si $A \cong M_n(D)$ et $B \cong M_m(D)$, où D est une algèbre à division sur P. On peut bien sûr facilement se ramener au cas des algèbres centrales simples en considérant les P-algèbres comme des Z-algèbres.

[5] C'est Emmy Noether qui a introduit cette notion. L'algèbre $A^{'}$ décrite ci-dessous est un produit croisé ("crossed product algebra"). Les éléments de base u_σ sont paramétrés par le groupe $\mathcal{N}$. Les relations **i-iii** assurent l'existence d'un produit associatif au sein de l'espace vectoriel $\sum_{\sigma \in \mathcal{N}} S u_\sigma$, ce qui en fait une algèbre associative. En effet, la relation **i)** permet de définir le produit $u_\sigma \xi$ et on peut noter qu'elle fait ainsi de σ un automorphisme intérieur. **ii)** permet de définir un produit dans $A^{'}$ et **iii)** rend ce produit associatif.

[6] En effet, S est de dimension finie sur Z donc on peut écrire $S = Ze_1 + ... + Ze_n$, où $(e_1, ..., e_n)$ est une base de S en tant que Z-espace vectoriel. Soit u_λ un automorphisme de $A^{'}$ prolongeant λ. En prolongeant $\phi_\lambda : \begin{array}{ccc} S^{u_\lambda} & \longrightarrow & S \\ z_1 e_1^{u_\lambda} + ... + z_n e_n^{u_\lambda} & \longmapsto & z_1 e_1 + ... + z_n e_n \end{array}$ on construit un automorphisme de $A^{'}$ qui, composé avec u_λ, donne un automorphisme de $A^{'}$ stabilisant S.

ment de S donc[7] est dans S.

On a :

$$u_\sigma^{v_\lambda} = \beta_{\lambda,\sigma} u_{v_\lambda \sigma v_\lambda^{-1}}. \tag{1}$$

En remplaçant dans **ii)**, puis en utilisant **i)**, on obtient :

$$\beta_{\lambda,\sigma} \beta_{\lambda,\tau}^{v_\lambda \sigma v_\lambda^{-1}} \alpha_{v_\lambda \sigma v_\lambda^{-1}, v_\lambda \tau v_\lambda^{-1}} = \alpha_{\sigma,\tau}^{v_\lambda} \beta_{\lambda,\sigma\tau}. \tag{2}$$

Ainsi, avoir la possibilité de prolonger λ à A' implique l'existence d'éléments $\beta_{\lambda,\sigma}$ dans S vérifiant la relation (2).

De manière réciproque, si à un élément λ de $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ et à un représentant v_λ de λ dans $\mathcal{G}$ correspondent des éléments $\beta_{\lambda,\sigma}$ dans S vérifiant (2), alors on peut prolonger λ à A' via (1). L'existence d'éléments $\beta_{\lambda,\sigma}$ dans S vérifiant (2) est donc une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un prolongement de λ à A'.

A désignant toujours une algèbre simple sur un corps P, de centre un corps Z galoisien et séparable sur P, s'il existe une algèbre simple B de centre P telle que A est le centralisateur[8] de Z dans B alors on sait que tout automorphisme de Z sur P se prolonge en un automorphisme de A.[9] On sait également que $M_{(Z:P)}(A)$ est isomorphe à $B \otimes_P Z$ et que $(B : A) = (Z : P)$.

Il est donc légitime d'examiner sous quelles hypothèses A se laisse inclure dans une algèbre simple B de rang $(Z : P)(A : P)$ et de centre P. Cette dernière propriété ne dépend d'ailleurs que de la classe en tant qu'algèbre de A, ce qui permet de choisir A sous la forme d'un produit croisé $(\alpha_{\sigma,\tau}, S, \mathcal{N})$, S et $\mathcal{N}$ étant comme plus haut. B est alors équivalente[10] à un produit croisé $(a_{s,t}, S, \mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ désigne toujours $Gal(S/P)$. Teichmüller veut arranger ce

[7] $\beta_{\lambda,\sigma}$ est un élément de A donc s'exprimant sous la forme $\sum_{\sigma \in \mathcal{N}} s_\sigma u_\sigma$. Ecrivant que $\beta_{\lambda,\sigma}$ commute avec tout élément de S on montre facilement que s_σ est nul dans l'écriture précédente, dès lors que σ n'est pas l'identité. On prouve ainsi que $\beta_{\lambda,\sigma}$ est un élément de la forme su_{id}, pour s appartenant à S, donc est dans S, au sens où S s'identifie au sous-corps Su_{id} de A.

[8] Le centralisateur de Z dans B est, par définition, l'ensemble des éléments de B commutant avec tous les éléments de Z ; on le notera $C_B(Z)$.

[9] B est une P-algèbre centrale simple et Z en est une sous-algèbre simple. Par conséquent, d'après le théorème de Skolem-Noether (pour une version moderne, voir par exemple [179] p. 140), tout automorphisme de Z sur P se prolonge en un automorphisme (intérieur) de B qui stabilise A (ce dernier point découle aisément de ce que A est le centralisateur de Z dans B).

[10] B est une algèbre centrale simple sur P contenant A, donc admettant S comme sous-corps maximal.

dernier produit croisé en une "forme normale" faisant apparaître le sous-groupe distingué $\mathcal{N}$. Si l'on associe à tout élément λ de $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ un unique représentant v_λ dans $\mathcal{G}$ alors les éléments de $\mathcal{G}$ s'écrivent de manière unique sous la forme

$$r = \rho v_\lambda,\ \rho \in \mathcal{N},\ \lambda \in \mathcal{G}/\mathcal{N},$$

λ désignant simplement la restriction de r à Z.

Les restrictions à Z de $v_\lambda v_\mu$ et $v_{\lambda\mu}$ coïncidant, on a : $v_\lambda v_\mu \equiv v_{\lambda\mu} \bmod \mathcal{N}$. On peut ainsi définir un élément $\theta_{\lambda,\mu}$ dans $\mathcal{N}$ vérifiant la relation

$$v_\lambda v_\mu = \theta_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}. \tag{3}$$

L'associativité $(v_\lambda v_\mu)v_\nu = v_\lambda(v_\mu v_\nu)$ se traduit par l'égalité $\theta_{\lambda,\mu}\theta_{\lambda\mu,\nu} = \theta^\lambda_{\mu,\nu}\theta_{\lambda,\mu\nu}$. On a également, si l'on note pour abréger σ^λ au lieu de $v_\lambda \sigma v_\lambda^{-1}$, $(\sigma^\mu)^\lambda = \theta_{\lambda,\mu}\sigma^{\lambda\mu}\theta^{-1}_{\lambda,\mu}$.

Le produit croisé

$$B = (a_{s,t}, S, \mathcal{G}) = \sum_{s\in\mathcal{G}} S u_s,$$

$u_s\xi = \xi^s u_s$, $\xi \in S$, $s \in \mathcal{G}$,

$u_s u_t = a_{s,t} u_{st}$,

reste inchangé si l'on multiplie chaque élément de base u_s par un élément non nul de S. Tout élément de G s'écrivant de manière unique – comme cela a été indiqué plus haut – sous la forme $r = \rho v_\lambda$, l'idée de Teichmüller est de conserver comme élements de base les u_ρ, pour ρ dans $\mathcal{N}$, les u_{v_λ} (notés simplement w_λ), pour λ dans $\mathcal{G}/\mathcal{N}$, et de remplacer les $u_{\rho v_\lambda} = a^{-1}_{\rho,v_\lambda} u_\rho w_\lambda$ par $u_\rho w_\lambda$.

B peut donc être réécrit sous la forme :

$$B = \sum_{\rho\in\mathcal{N},\lambda\in\mathcal{G}/\mathcal{N}} S u_\rho w_\lambda,$$

(4)

i) $u_\sigma u_\tau = \alpha_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}$;

ii) $w_\lambda u_\sigma = \beta_{\lambda,\sigma} u_{\sigma^\lambda} w_\lambda$;

iii) $w_\lambda w_\mu = \gamma_{\lambda,\mu} u_{\theta_{\lambda,\mu}} w_{\lambda\mu}$.

où $\alpha_{\sigma,\tau}$, $\beta_{\lambda,\sigma}$ et $\gamma_{\lambda,\mu}$ sont des éléments non nuls de S[11].

[11] En ce qui concerne $\alpha_{\sigma,\tau}$, on a, pour ξ quelconque dans S, $u_\sigma u_\tau \xi = u_\sigma \xi^\tau u_\tau = \xi^{\sigma\tau} u_\sigma u_\tau = \xi^{\sigma\tau}\alpha_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}$ et $u_\sigma u_\tau \xi = \alpha_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}\xi = \alpha_{\sigma,\tau}\xi^{\sigma\tau} u_{\sigma\tau}$. Ceci prouve que $\alpha_{\sigma,\tau}$ commute avec tout élément de S et on obtient de manière analogue la même propriété pour $\beta_{\lambda,\sigma}$ et $\gamma_{\lambda,\mu}$. Par un argument déjà donné précédemment (cf. note 7), on en déduit que $\alpha_{\sigma,\tau}$, $\beta_{\lambda,\sigma}$ et $\gamma_{\lambda,\mu}$ sont dans S.

La multiplication de deux éléments dans B est bien définie via l'égalité

$$\xi u_\rho w_\lambda . \eta u_\sigma w_\mu = \xi \eta^{\rho v_\lambda} \beta^\rho_{\lambda,\sigma} \gamma^{\rho\sigma^\lambda}_{\lambda,\mu} \alpha_{\rho,\sigma^\lambda} \alpha_{\rho\sigma^\lambda,\theta_{\lambda,\mu}} u_{\rho\sigma^\lambda,\theta_{\lambda,\mu}} w_{\lambda,\mu}, \tag{5}$$

qui découle de (4).

Les relations d'associativité $(u_\rho u_\sigma) u_\theta = u_\rho (u_\sigma u_\theta)$, $(w_\lambda u_\sigma) u_\tau = w_\lambda (u_\sigma u_\tau)$, $(w_\lambda w_\mu) u_\tau = w_\lambda (w_\mu u_\tau)$ et $(w_\lambda w_\mu) w_\nu = w_\lambda (w_\mu w_\nu)$ conduisent respectivement aux relations :

$$\alpha_{\rho,\sigma} \alpha_{\rho\sigma,\tau} = \alpha^\rho_{\sigma,\tau} \alpha_{\rho,\sigma\tau}; \tag{6}$$

$$\beta_{\lambda,\sigma} \beta^{\sigma^\lambda}_{\lambda,\tau} \alpha_{\sigma^\lambda,\tau^\lambda} = \alpha^{v_\lambda}_{\sigma,\tau} \beta_{\lambda,\sigma\tau}; \tag{7}$$

$$\gamma_{\lambda,\mu} \beta^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\tau} \alpha_{\theta_{\lambda,\mu},\tau^{\lambda\mu}} = \beta^{v_\lambda}_{\mu,\tau} \beta_{\lambda,\tau^\mu} \gamma^{(\tau^\mu)^\lambda}_{\lambda,\mu} \alpha_{(\tau^\mu)^\lambda,\theta_{\lambda,\mu}}; \tag{8}$$

$$\gamma_{\lambda,\mu} \gamma^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\nu} \alpha_{\theta_{\lambda,\mu},\theta_{\lambda\mu,\nu}} = \gamma^{v_\lambda}_{\mu,\nu} \beta_{\lambda,\theta_{\mu,\nu}} \gamma^{\theta^\lambda_{\mu,\nu}}_{\lambda,\mu\nu} \alpha_{\theta^\lambda_{\mu,\nu},\theta_{\lambda,\mu\nu}}. \tag{9}$$

Les conditions (6), (7), (8) et (9) sont nécessaires pour que B soit un produit croisé (donc, en particulier, une algèbre associative). On peut également prouver qu'elles sont suffisantes, au sens où si l'on se donne $B = \sum S u_\rho w_\lambda$, où les éléments de base vérifient $u_\rho \xi = \xi^\rho u_\rho$ et $w_\lambda \xi = \xi^{v_\lambda} w_\lambda$ pour ξ dans S et où il existe des éléments $\alpha_{\sigma,\tau}$, $\beta_{\lambda,\sigma}$ et $\gamma_{\lambda,\mu}$ vérifiant (4), alors les relations (6)-(9) impliquent que B est un produit croisé. Posons en effet $\overline{u}_{\rho v_\lambda} = u_\rho w_\lambda$; à l'aide de (5) on peut montrer qu'il existe un système $(a_{\rho v_\lambda,\sigma v_\mu})$ d'éléments de S tels que $\overline{u}_{\rho v_\lambda} \overline{u}_{\sigma v_\mu} = a_{\rho v_\lambda,\sigma v_\mu} \overline{u}_{\rho v_\lambda \sigma v_\mu}$[12]. Les relations (6) à (9) permettent de prouver l'égalité

$$a_{\rho v_\lambda,\sigma v_\mu} a_{\rho v_\lambda \sigma v_\mu,\tau v_\nu} = a^{\rho v_\lambda}_{\sigma v_\mu,\tau v_\nu} a_{\rho v_\lambda,\sigma v_\mu \tau v_\nu},$$

dont on déduit $(\overline{u}_{\rho v_\lambda} \overline{u}_{\sigma v_\mu}) \overline{u}_{\tau v_\nu} = \overline{u}_{\rho v_\lambda} (\overline{u}_{\sigma v_\mu} \overline{u}_{\tau v_\nu})$ et donc l'associativité du produit interne de B.

Teichmüller esquisse également une autre preuve de ce que, sous les conditions du paragraphe précédent, B est un produit croisé. Il procède en posant $A = \sum_{\rho \in \mathcal{N}} S u_\rho$. Les relations $u_\rho \xi = \xi^\rho u_\rho$, 4i) et 6) étant valides par hypothèse, A est bien un produit croisé. En particulier A est une algèbre simple de centre Z, le corps des éléments de B laissés fixes par tous les automorphismes de $\mathcal{N}$.

[12] Il suffit d'utiliser (5) avec $\xi = \eta = 1$. On trouve alors $a_{\rho v_\lambda,\sigma v_\mu} = \alpha_{\rho,\sigma^\lambda} \alpha_{\rho\sigma^\lambda,\theta_{\lambda,\mu}} \beta^\rho_{\lambda,\sigma} \gamma^{\rho\sigma^\lambda}_{\lambda,\mu}$.

La relation (4ii) fournit l'existence d'éléments $\beta_{\lambda,\sigma}$ qui vérifient (7) par hypothèse. Si on pose $u_\sigma^{v_\lambda} = \beta_{\lambda,\sigma} u_{\sigma^\lambda}$ (relation (1)), on prolonge ainsi l'automorphisme v_λ de $\mathcal{G}$ – qui est un représentant de λ appartenant à $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ – de S à A[13].

Posant alors

$$\Theta_{\lambda,\mu} = \gamma_{\lambda,\mu} u_{\theta_{\lambda,\mu}}{}^{14}, \tag{10}$$

on peut écrire B sous la forme

$$B = \sum_{\lambda \in \mathcal{G}/\mathcal{N}} A w_\lambda;$$

$w_\lambda x = x^{v_\lambda} w_\lambda{}^{15}$, $x \in A$;
$w_\lambda w_\mu = \Theta_{\lambda,\mu} w_{\lambda\mu}$.

Ainsi présentée, B ressemble à un produit croisé. Il reste encore à montrer, pour s'assurer que B est bien un produit croisé, que l'on a

$$(x^{v_\mu})^{v_\lambda} = \Theta_{\lambda,\mu} x^{v_{\lambda\mu}} \Theta_{\lambda,\mu}^{-1\,16}, \;\; x \in A; \tag{11}$$

$$\Theta_{\lambda,\mu} \Theta_{\lambda\mu,\nu} = \Theta_{\mu,\nu}^{v_\lambda} \Theta_{\lambda,\mu\nu}{}^{17}. \tag{12}$$

Ces dernières relations découlent respectivement de (8) et de (9) (elles sont mêmes équivalentes).

Teichmüller procède alors à une synthèse de ses considérations précédentes. Le problème posé était, étant donnés un corps P, deux extensions $Z \subset S$ séparables et galoisiennes de P ainsi qu'un produit croisé $A = (\alpha_{\sigma,\tau}, S, \mathcal{N})$, de déterminer s'il existe une algèbre B de centre P telle que A soit une sous-algèbre de B coïncidant avec $C_B(Z)$ et vérifiant $(B : P) = (Z : P)(A : P)$. Comme A est un produit croisé, le système $(\alpha_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau \in \mathcal{N}}$ vérifie (6). L'étude qui précède montre qu'une algèbre B répondant au problème posé ne peut

[13]En effet la relation (7) est identique à la relation (2) et on a vu que (2) était une condition nécessaire et suffisante pour prolonger v_λ.

[14]Les $\Theta_{\lambda,\mu}$ sont des éléments de S ; ceci se prouve de la même manière qu'en de précédentes occasions, en montrant qu'ils commutent avec tout élément de S.

[15]Cette relation n'est qu'une réécriture de (4ii) à l'aide de (1)

[16]Cette relation correspond à l'égalité $(w_\lambda w_\mu)x = w_\lambda(w_\mu x)$. Dans les produits croisés recontrés jusqu'à présent, cette égalité n'avait pas été mentionnée car les éléments jouant le rôle qu'occupe ici x étaient dans S, ce qui la rend triviale ; la vérification s'impose ici car x est dans A.

[17]Ceci assure que $(w_\lambda w_\mu)w_\nu = w_\lambda(w_\mu w_\nu)$, ce qui achève de prouver que B est associative.

exister que s'il existe deux systèmes $(\beta_{\lambda,\sigma})_{\lambda\in\mathcal{G}/\mathcal{N},\sigma\in\mathcal{N}}$ et $(\gamma_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\mathcal{G}/\mathcal{N}}$ vérifiant (7), (8) et (9).

La relation (7) est identique à la relation (2). Par conséquent un système $(\beta_{\lambda,\sigma})_{\lambda\in\mathcal{G}/\mathcal{N},\sigma\in\mathcal{N}}$ vérifiant (7) ne peut exister que si tout automorphisme de Z sur P peut se prolonger en un automorphisme de A. Cependant si un système $(\beta_{\lambda,\sigma})$ satisfait (7) alors tout système de la forme $(\frac{d_\lambda^{\sigma^\lambda}}{d_\lambda}\beta_{\lambda,\sigma})$ – où les d_λ sont des éléments non nuls de S – satisfait également (7). On peut d'ailleurs vérifier aisément que cette modification du système $(\beta_{\lambda,\sigma})$ correspond au remplacement des éléments de base w_λ de B en tant que A-algèbre par $d_\lambda^{-1}w_\lambda$. De même, si un système $(\alpha_{\sigma,\tau})$ est solution de (6) alors tout système de la forme $(\frac{c_\sigma c_\tau^\sigma}{c_{\sigma\tau}}\alpha_{\sigma,\tau})$ – où les c_σ sont des éléments non nuls de S – satisfait (6) ; et cette modification du système $(\alpha_{\sigma,\tau})$ correspond à la multiplication des éléments de base u_σ de A en tant que S-algèbre par c_σ.

Teichmüller montre alors, qu'étant donnés deux systèmes $(\alpha_{\sigma,\tau})$ et $(\beta_{\lambda,\sigma})$ vérifiant respectivement (6) et (7), la relation (8) admet toujours une solution[18].

Il procède comme suit. Vu qu'il existe $(\beta_{\lambda,\sigma})$ vérifiant (7), tout automorphisme λ de Z sur P se prolonge en un automorphisme de A. Comme cela a déjà été expliqué, il suffit pour ce faire de choisir un représentant v_λ dans $\mathcal{G}$ de l'élément λ de $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ (ce qui signifie simplement que v_λ est un automorphisme de S dont la restriction à Z coïncide avec λ) et de prolonger ensuite v_λ à A en définissant sa valeur sur les u_σ via la relation (1). L'élément $v_\lambda v_\mu v_{\lambda\mu}^{-1}$ est un automorphisme de A dont la restriction à Z est l'identité ; il s'agit donc d'un automorphisme intérieur[19], i.e. de la forme $x \mapsto \Theta^*_{\lambda,\mu}x\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}$, où $\Theta^*_{\lambda,\mu}$ est un élément inversible de A. Si l'on se restreint à des éléments x de S, on a, d'après (3), $\Theta^*_{\lambda,\mu}x\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu} = x^{\theta_{\lambda,\mu}}$, où $\theta_{\lambda,\mu}$ est dans $\mathcal{N}$. Or, pour x dans S, $u_{\theta_{\lambda,\mu}}x = x^{\theta_{\lambda,\mu}}u_{\theta_{\lambda,\mu}}$, d'où $\Theta^*_{\lambda,\mu}x\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu} = u_{\theta_{\lambda,\mu}}xu^{-1}_{\theta_{\lambda,\mu}}$. Ainsi $\Theta^*_{\lambda,\mu}u^{-1}_{\theta_{\lambda,\mu}}$ commute avec tout élément de S donc[20] est lui-même dans S. On en déduit finalement qu'il existe un élément $\gamma^*_{\lambda,\mu}$ de S tel que

$$\Theta^*_{\lambda,\mu} = \gamma^*_{\lambda,\mu}u_{\theta_{\lambda,\mu}}.$$

Teichmüller affirme alors que le système $(\gamma^*_{\lambda,\mu})$ vérifie (8), du fait de l'équivalence entre (8) et (11).

[18] Teichmüller indique également pouvoir prouver ce point en utilisant la propriété $\frac{c_\sigma c_\tau^\sigma}{c_{\sigma\tau}} = 1 \Rightarrow c_\sigma = \frac{d^\sigma}{d}$ mais ne développe pas cette voie.

[19] Ceci est une conséquence du théorème de Skolem-Noether, cf. par exemple [109], corollaire p. 100.

[20] C'est un argument déjà utilisé à plusieurs reprises.

Sans montrer l'équivalence mentionnée par Teichmüller, nous expliquons dans les lignes qui suivent pourquoi $(\gamma^*_{\lambda,\mu})$ vérifie (8). Pour τ appartenant à $\mathcal{N}$, on a $(u_\tau^{v_\mu})^{v_\lambda} = u_\tau^{v_\lambda v_\mu} = \Theta^*_{\lambda,\mu} u_\tau^{v_{\lambda\mu}} {\Theta^*}^{-1}_{\lambda,\mu}$, par définition de $\Theta^*_{\lambda,\mu}$.

D'une part, $(u_\tau^{v_\mu})^{v_\lambda} = (\beta_{\mu,\tau} u_{\tau^\mu})^{v_\lambda} = \beta^{v_\lambda}_{\mu,\tau}\beta_{\lambda,\tau^\mu} u_{(\tau^\mu)^\lambda}$.

D'autre part, $\Theta^*_{\lambda,\mu} u_\tau^{v_{\lambda\mu}} {\Theta^*}^{-1}_{\lambda,\mu} = \gamma^*_{\lambda,\mu} u_{\theta_{\lambda,\mu}} u_\tau^{v_{\lambda\mu}} (\gamma^*_{\lambda,\mu} u_{\theta_{\lambda,\mu}})^{-1}$.

Ces dernières quantités étant égales, on a : $\gamma^*_{\lambda,\mu} u_{\theta_{\lambda,\mu}} u_\tau^{v_{\lambda\mu}} = \beta^{v_\lambda}_{\mu,\tau}\beta_{\lambda,\tau^\mu} u_{(\tau^\mu)^\lambda} \gamma^*_{\lambda,\mu} u_{\theta_{\lambda,\mu}}$.

Comme $u_\tau^{v_{\lambda\mu}} = \beta_{\lambda\mu,\tau} u_{\tau^{\lambda\mu}}$, le membre de gauche de l'égalité précédente devient $\gamma^*_{\lambda,\mu} u_{\theta_{\lambda,\mu}} \beta_{\lambda\mu,\tau} u_{\tau^{\lambda\mu}}$, puis $\gamma^*_{\lambda,\mu} \beta^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\tau} u_{\theta_{\lambda,\mu}} u_{\tau^{\lambda\mu}}$. Le membre de droite, quant à lui, est égal à $\beta^{v_\lambda}_{\mu,\tau}\beta_{\lambda,\tau^\mu} {\gamma^*_{\lambda,\mu}}^{(\tau^\mu)^\lambda} u_{(\tau^\mu)^\lambda} u_{\theta_{\lambda,\mu}}$. Comme $u_{\theta_{\lambda,\mu}} u_{\tau^{\lambda\mu}} = \alpha_{\theta_{\lambda,\mu},\tau^{\lambda\mu}} u_{\theta_{\lambda,\mu}\tau^{\lambda\mu}}$ et $u_{(\tau^\mu)^\lambda} u_{\theta_{\lambda,\mu}} = \alpha_{(\tau^\mu)^\lambda,\theta_{\lambda,\mu}} u_{(\tau^\mu)^\lambda\theta_{\lambda,\mu}}$, on obtient finalement l'égalité :

$$\gamma^*_{\lambda,\mu} \beta^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\tau} \alpha_{\theta_{\lambda,\mu},\tau^{\lambda\mu}} u_{\theta_{\lambda,\mu}\tau^{\lambda\mu}} = \beta^{v_\lambda}_{\mu,\tau}\beta_{\lambda,\tau^\mu} {\gamma^*_{\lambda,\mu}}^{(\tau^\mu)^\lambda} \alpha_{(\tau^\mu)^\lambda,\theta_{\lambda,\mu}} u_{(\tau^\mu)^\lambda\theta_{\lambda,\mu}}.$$

Or, $(\tau^\mu)^\lambda = \theta_{\lambda,\mu}\tau^{\lambda\mu}\theta^{-1}_{\lambda,\mu}$, d'où $u_{\theta_{\lambda,\mu}\tau^{\lambda\mu}} = u_{(\tau^\mu)^\lambda\theta_{\lambda,\mu}}$. On a donc

$$\gamma^*_{\lambda,\mu} \beta^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\tau} \alpha_{\theta_{\lambda,\mu},\tau^{\lambda\mu}} = \beta^{v_\lambda}_{\mu,\tau}\beta_{\lambda,\tau^\mu} {\gamma^*_{\lambda,\mu}}^{(\tau^\mu)^\lambda} \alpha_{(\tau^\mu)^\lambda,\theta_{\lambda,\mu}},$$

égalité qui n'est rien d'autre que (8).

Reprenons le cours du propos de Teichmüller. La solution générale de (8) est de la forme

$$\gamma_{\lambda,\mu} = x_{\lambda,\mu}\gamma^*_{\lambda,\mu},\text{[21]}\ x_{\lambda,\mu} \in Z. \tag{13}$$

Teichmüller veut évidemment examiner les conditions portant sur $(x_{\lambda,\mu})$ afin que $\gamma_{\lambda,\mu}$ vérifie la relation (9). Si l'on raisonne par condition nécessaire, ceci impose la relation

$$x^\lambda_{\mu,\nu} x_{\lambda,\mu\nu} = \xi_{\lambda,\mu,\nu} x_{\lambda,\mu} x_{\lambda\mu,\nu},\text{[22]} \tag{14}$$

[21] En effet, $\Theta^*_{\lambda,\mu}$ n'est déterminé qu'à un élément du centre près, étant donné que l'automorphisme intérieur associé à un élément du centre est l'identité. Et par conséquent, $\gamma^*_{\lambda,\mu}$ également n'est défini qu'à un élément du centre près.

[22] Si l'on remplace $\gamma_{\lambda,\mu}$ par $x_{\lambda,\mu}\gamma^*_{\lambda,\mu}$ dans la relation (9), on obtient :

$$x_{\lambda,\mu}\gamma^*_{\lambda,\mu} x^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\nu} {\gamma^*_{\lambda\mu,\nu}}^{\theta_{\lambda,\mu}} \alpha_{\theta_{\lambda,\mu},\theta_{\lambda\mu,\nu}} = x^{v_\lambda}_{\mu,\nu} {\gamma^*_{\mu,\nu}}^{v_\lambda} \beta_{\lambda,\theta_{\mu,\nu}} x^{\theta^\lambda_{\mu,\nu}}_{\lambda,\mu\nu} {\gamma^*_{\lambda,\mu\nu}}^{\theta^\lambda_{\mu,\nu}} \alpha_{\theta^\lambda_{\mu,\nu},\theta_{\lambda,\mu\nu}}.$$

Les éléments $x_{\lambda,\mu}$ commutant avec tout élément de A et les α, β et γ^* étant non nuls, on peut écrire $x^{v_\lambda}_{\mu,\nu} x^{\theta^\lambda_{\mu,\nu}}_{\lambda,\mu\nu} = \xi_{\lambda,\mu,\nu} x_{\lambda,\mu} x^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\nu}$, où $\xi_{\lambda,\mu,\nu} = \dfrac{\gamma^*_{\lambda,\mu} {\gamma^*_{\lambda\mu,\nu}}^{\theta_{\lambda,\mu}} \alpha_{\theta_{\lambda,\mu},\theta_{\lambda\mu,\nu}}}{{\gamma^*_{\mu,\nu}}^{v_\lambda} \beta_{\lambda,\theta_{\mu,\nu}} {\gamma^*_{\lambda,\mu\nu}}^{\theta^\lambda_{\mu,\nu}} \alpha_{\theta^\lambda_{\mu,\nu},\theta_{\lambda,\mu\nu}}}$. De plus, $x_{\mu,\nu}$ étant dans Z et v_λ coïncidant avec λ sur Z, on a $x^{v_\lambda}_{\mu,\nu} = x^\lambda_{\mu,\nu}$. Enfin, les $\theta_{\lambda,\mu}$ – étant des éléments de $\mathcal{N}$ – valent l'identité sur Z et donc $x^{\theta_{\lambda,\mu}}_{\lambda\mu,\nu} = x_{\lambda\mu,\nu}$ et $x^{\theta^\lambda_{\mu,\nu}}_{\lambda,\mu\nu} = x_{\lambda,\mu\nu}$, ce qui achève de prouver (14).

où $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ s'exprime en fonction des α, β et γ^*.

Maintenant, comme (9) équivaut à (12), dire que que $\gamma_{\lambda,\mu}$ vérifie la relation (9) revient à dire que $\Theta_{\lambda,\mu}\Theta_{\lambda\mu,\nu} = \Theta_{\mu,\nu}^{v_\lambda}\Theta_{\lambda,\mu\nu}$, où $\Theta_{\lambda,\mu} = \gamma_{\lambda,\mu}u_{\theta_{\lambda,\mu}}$[23] $= x_{\lambda,\mu}\gamma^*_{\lambda,\mu}u_{\theta_{\lambda,\mu}} = x_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda,\mu}$, et donc que

$$x_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda,\mu}x_{\lambda\mu,\nu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu} = x^\lambda_{\mu,\nu}\Theta^{*^{v_\lambda}}_{\mu,\nu}x_{\lambda,\mu\nu}\Theta^*_{\lambda,\mu\nu}.$$

La relation (14) est donc identique à

$$\xi_{\lambda,\mu,\nu} = \Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu}\Theta^{*^{-v_\lambda}}_{\mu,\nu}. \tag{14}$$

Si l'on considère l'automorphisme de A défini par $x \mapsto \xi_{\lambda,\mu,\nu}x\xi^{-1}_{\lambda,\mu,\nu}$, on constate qu'il vaut

$$v_\lambda v_\mu v^{-1}_{\lambda\mu}.v_{\lambda\mu}v_\nu v^{-1}_{\lambda\mu\nu}.(v_\lambda v_{\mu\nu}v^{-1}_{\lambda\mu\nu})^{-1}.v_\lambda(v_\mu v_\nu v^{-1}_{\mu\nu})^{-1}v^{-1}_\lambda,\text{[24]}$$

expression qui, après simplification, apparaît comme étant l'identité. Ainsi $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ commute avec tout élément de A et se trouve par conséquent dans le centre Z de A.

Teichmüller établit ensuite une relation entre les $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ en considérant $\xi^\lambda_{\mu,\nu,\pi}$. On a en effet :

$$\begin{array}{rcl}
\xi^\lambda_{\mu,\nu,\pi} & = & \Theta^{*^{v_\lambda}}_{\mu,\nu}\Theta^{*^{v_\lambda}}_{\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-v_\lambda}}_{\mu,\nu\pi}(\Theta^{*^{-v_\mu}}_{\nu,\pi})^{v_\lambda} \\
 & = & \Theta^{*^{v_\lambda}}_{\mu,\nu}\Theta^{*^{v_\lambda}}_{\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-v_\lambda}}_{\mu,\nu\pi}(\Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^{*^{-v_{\lambda\mu}}}_{\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu})
\end{array}$$

car $\Theta^{*^{-1^{v_\lambda v_\mu v^{-1}_{\lambda\mu}}}}_{\nu,\pi} = \Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^{*^{-1}}_{\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}$,

$$\begin{array}{rl}
= & \Theta^{*^{v_\lambda}}_{\mu,\nu}(\Theta^*_{\lambda,\mu\nu}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu}) \\
\times & \Theta^{*^{v_\lambda}}_{\mu\nu,\pi}(\Theta^*_{\lambda,\mu\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu}\Theta^*_{\lambda,\mu\nu}\Theta^*_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu\pi}) \\
\times & (\Theta^*_{\lambda,\mu\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu\pi})\Theta^{*^{-v_\lambda}}_{\mu,\nu\pi} \\
\times & \Theta^*_{\lambda,\mu}(\Theta^*_{\lambda\mu,\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu}\Theta^*_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu\pi})\Theta^{*^{-v_{\lambda\mu}}}_{\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu} \\
= & (\xi^{-1}_{\lambda,\mu,\nu}\Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu})(\xi^{-1}_{\lambda,\mu\nu,\pi}\Theta^*_{\lambda,\mu\nu}\Theta^*_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu\pi}) \\
\times & (\Theta^*_{\lambda,\mu\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}\xi_{\lambda,\mu,\nu\pi})\Theta^*_{\lambda,\mu}(\Theta^*_{\lambda\mu,\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi})\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu} \\
= & \xi^{-1}_{\lambda,\mu,\nu}\xi^{-1}_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}\Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu}\Theta^*_{\lambda,\mu\nu}\Theta^*_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu\nu\pi} \\
\times & \Theta^*_{\lambda,\mu\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda,\mu}\Theta^*_{\lambda\mu,\nu\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu\nu,\pi}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda\mu,\nu}\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}
\end{array}$$

car les éléments ξ sont dans Z,

$$= \quad \xi^{-1}_{\lambda,\mu,\nu}\xi^{-1}_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}, \text{ après simplification.}$$

Teichmüller obtient ainsi la relation

$$\xi_{\lambda,\mu,\nu}\xi_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi^\lambda_{\mu,\nu,\pi} = \xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}, \tag{15}$$

[23] D'après la relation (10).

[24] Il suffit d'utiliser le fait que $v_\lambda v_\mu v^{-1}_{\lambda\mu}$ est égal à l'automorphisme $x \mapsto \Theta^*_{\lambda,\mu}x\Theta^{*^{-1}}_{\lambda,\mu}$.

qui apparaît dans le titre de son article.

Cette dernière relation suscite un intérêt particulier pour Teichmüller et il en développe par la suite plusieurs aspects. Tout d'abord il amorce une discussion sur des relations analogues qui apparaissent dans le cas d'une extension finie galoisienne séparable Z d'un corps P, où les éléments du groupe de Galois associé sont désignés par λ, μ, ν, etc.

Pour commencer, un élément d de Z vérifie $d^\lambda = d$ pour tout automorphisme λ de Z sur P si et seulement si cet élément est dans P (car l'extension est supposée galoisienne).

Ensuite, une famille c_λ d'éléments de Z vérifie les relations $c_\lambda c_\mu^\lambda = c_{\lambda\mu}$ si et seulement si $c_\lambda = \dfrac{d^\lambda}{d}$.[25]

On peut continuer de même, mais on ne garde plus d'équivalence. Ainsi on a $a_{\lambda,\mu}a_{\lambda\mu,\nu} = a_{\mu,\nu}^\lambda a_{\lambda,\mu\nu}$ si $a_{\lambda,\mu}$ est de la forme $a_{\lambda,\mu} = \dfrac{c_\lambda c_\mu^\lambda}{c_{\lambda\mu}}$ mais ceci n'est pas une condition nécessaire. La relation $a_{\lambda,\mu}a_{\lambda\mu,\nu} = a_{\mu,\nu}^\lambda a_{\lambda,\mu\nu}$ est apparue au cours du travail de Teichmüller, sous la forme (6) (il s'agit d'une condition d'associativité). Et on a pu voir que si l'on avait $\alpha_{\sigma,\tau} = \dfrac{c_\sigma c_\tau^\sigma}{c_{\sigma\tau}}$ alors on obtenait un système de facteurs $\alpha_{\sigma,\tau}$ égaux à 1 en remplaçant les éléments de base u_σ par $c_\sigma^{-1}u_\sigma$. Ainsi le système de facteurs $(a_{\lambda,\mu})$ est associé au système de facteurs identité.

Teichmüller poursuit en remarquant que des quantités $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ vérifient $\xi_{\lambda,\mu,\nu}\xi_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi_{\mu,\nu,\pi}^\lambda = \xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}$ si elles ont la forme $\xi_{\lambda,\mu,\nu} = \dfrac{a_{\lambda,\mu}a_{\lambda\mu,\nu}}{a_{\mu,\nu}^\lambda a_{\lambda,\mu\nu}}$ (cette condition suffisante apparaît naturellement dans son raisonnement précédent, en remplaçant Θ^* par a). Teichmüller indique ici avoir eu connaissance de l'existence de la relation (15) par Ernst Witt, et mentionne un article de ce dernier [246] où apparaît (sous forme additive) l'équation $a_{\lambda,\mu}a_{\lambda\mu,\nu} = a_{\mu,\nu}^\lambda a_{\lambda,\mu\nu}$. Il précise surtout la possibilité de dérouler la suite de relations analogues à (15), faisant intervenir un nombre de variables λ, μ, ν, etc. toujours croissant, et attribue également cette dernière remarque à Witt.

Reprenons le cours du raisonnement de Teichmüller. Rappelons que nous avons une extension galoisienne séparable finie Z d'un corps P et que nous considérons une algèbre simple A de centre Z telle que tout automorphisme

[25] Les relations $c_\lambda c_\mu^\lambda = c_{\lambda\mu}$ sont souvent appelées "équations de Noether". On peut trouver une démonstration du fait que leurs solutions sont de la forme $c_\lambda = \dfrac{d^\lambda}{d}$ dans N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, III (p. 75-76) par exemple. On peut retrouver le théorème 90 de Hilbert comme corollaire de ce résultat.

de Z se prolonge en un automorphisme de A. On sait maintenant obtenir un système de quantités $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ vérifiant (15). En effet, si l'on se donne pour tout automorphisme λ de Z un prolongement v_λ à A, alors $v_\lambda v_\mu v_{\lambda\mu}^{-1}$ est un automorphisme de A dont la restriction à Z est l'identité ; cet automorphisme de A est intérieur d'après le théorème de Skolem-Noether et il existe donc un élément $\Theta_{\lambda,\mu}$ dans A tel que, pour tout x de A, $x^{v_\lambda v_\mu v_{\lambda\mu}^{-1}} = \Theta_{\lambda,\mu} x \Theta_{\lambda,\mu}^{-1}$. Posant $\xi_{\lambda,\mu,\nu} = \dfrac{\Theta_{\lambda,\mu}\Theta_{\lambda\mu,\nu}}{\Theta_{\mu,\nu}^{\lambda}\Theta_{\lambda,\mu\nu}}$, on montre (comme cela a déjà été fait précédemment avec Θ^* au lieu de Θ), que les $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ sont dans Z, puis qu'ils vérifient (15).

Cela dit la question de l'unicité de tels $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ apparaît naturellement car non seulement il n'y a pas un unique prolongement v_λ de λ à A, mais en outre les $\Theta_{\lambda,\mu}$ ne sont déterminés qu'à un élément de Z près. On montre par un simple calcul qu'une fois un prolongement v_λ de λ fixé, si l'on prend $x_{\lambda,\mu}\Theta_{\lambda,\mu}$ à la place de $\Theta_{\lambda,\mu}$, alors $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ est transformé en $\dfrac{x_{\lambda,\mu}x_{\lambda\mu,\nu}}{x_{\mu,\nu}^{\lambda}x_{\lambda,\mu\nu}}\xi_{\lambda,\mu,\nu}$. Par contre si l'on considère une famille différente $v_\lambda^{'}$ de prolongements des λ, on trouve après un court calcul que $\xi_{\lambda,\mu,\nu}^{'} := \dfrac{\Theta_{\lambda,\mu}^{'}\Theta_{\lambda\mu,\nu}^{'}}{\Theta_{\mu,\nu}^{'\lambda}\Theta_{\lambda,\mu\nu}^{'}} = \dfrac{\Theta_{\lambda,\mu}\Theta_{\lambda\mu,\nu}}{\Theta_{\mu,\nu}^{\lambda}\Theta_{\lambda,\mu\nu}}$. Ceci permet finalement à Teichmüller de formuler le résultat suivant :

Toute algèbre simple A de centre Z, dans laquelle tout automorphisme de Z sur P peut être prolongé à A, détermine un système $(\xi_{\lambda,\mu,\nu})$ vérifiant (15), unique à multiplication par $\dfrac{x_{\lambda,\mu}x_{\lambda\mu,\nu}}{x_{\mu,\nu}^{\lambda}x_{\lambda,\mu\nu}}$ près.

Le système $(\xi_{\lambda,\mu,\nu})$ ne dépend que de la classe d'algèbre de A. L'ensemble des classes d'algèbres simples sur Z, dans lesquelles tout automorphisme de Z se prolonge à A, muni du produit direct (c'est-à-dire notre produit tensoriel), forme un groupe. La multiplication de deux classes d'algèbres se traduit par la multiplication des $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ respectifs. Il est une classe particulière, celle pour laquelle $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ a la forme $\dfrac{x_{\lambda,\mu}x_{\lambda\mu,\nu}}{x_{\mu,\nu}^{\lambda}x_{\lambda,\mu\nu}}$ (on dit dans ce cas que $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ se décompose[26]). Cette classe est la même que celle pour laquelle $\xi_{\lambda,\mu,\nu} = 1$ (il suffit de multiplier $\Theta_{\lambda,\mu}$ par $x_{\lambda,\mu}^{-1}$). Or, $\xi_{\lambda,\mu,\nu} = 1$ est la condition nécessaire et suffisante pour avoir l'associativité[27] dans

$$B = \sum_{\lambda \in \mathcal{G}/\mathcal{N}} A w_\lambda ;$$

$w_\lambda x = x^{v_\lambda} w_\lambda,\ x \in A$;

[26]"$\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ zerfällt".
[27]Cf. la relation (12).

$w_\lambda w_\mu = \Theta_{\lambda,\mu} w_{\lambda\mu}.$

Ainsi, si $\xi_{\lambda,\mu,\nu} = 1$, alors A peut être incluse dans une algèbre simple B de centre P et de rang $(Z : P)(A : P)$. Et la réciproque se prouve aisément.

Les deux résultats énoncés dernièrement se regroupent en une même proposition :

Le quotient du groupe des classes d'algèbres sur Z, dans lesquelles tout automorphisme de Z sur P se prolonge à A, par le sous-groupe des classes d'algèbres obtenues par extension du corps de base d'algèbres sur P, est isomorphe au quotient du groupe des systèmes $(\xi_{\lambda,\mu,\nu})$ vérifiant (15) par le sous-groupe des systèmes $(\frac{x_{\lambda,\mu} x_{\lambda\mu,\nu}}{x^{\lambda}_{\mu,\nu} x_{\lambda,\mu\nu}})$.

L'article de Teichmüller finit quasiment sur ce résultat, qu'Eilenberg et Mac Lane ont traduit quelques années plus tard dans le langage cohomologique.[28]

[28]Voir 9.6.

Bibliographie

[1] *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Zürich, 1932 ; Orel Füssli, Zurich and Leipzig (1932).

[2] Adda, J., *Une lumière s'est éteinte H. Freudenthal - Homo Universalis*, Educational Studies in Mathematics **25** (1993), 9-19.

[3] Alexander, J. W., *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 333-349.

[4] Alexander, J. W., *Combinatorial analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), 301-329.

[5] Alexander, J. W., *On the chains of a complex and their duals*, Proc. Nat. Acad. Sci. **21** (1935), 509-511.

[6] Alexander, J. W., *On the ring of a compact metric*, Proc. Nat. Acad. Sci. **21** (1935), 511-512.

[7] Alexandroff, P. S., *Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Mathematische Annalen **94** (1925), 296-308.

[8] Alexandroff, P. S., *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Mathematische Annalen **96** (1926), 555-571.

[9] Alexandroff, P. S., *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin : Springer Verlag, 1932 ; english translation : *Elementary concepts of Topology*, Dover, 1961.

[10] Alexandroff, P., Hopf, H., *Topologie*, Berlin, Springer, 1935.

[11] Alexandroff, P. S., *Pages from an autobiography*, Russian Math. Surveys **34** (6) (1979), 267-302 ; **35** (3) (1980), 315-358.

[12] Alexandroff, P. S., *In Memory of Emmy Noether, Address delivered by the President of the Moscow Mathematical Society P. S. Alexandrov on September 5. 1935*, EMMY NOETHER, Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Springer-Verlag, 1983, 1-11.

[13] Artin, E., Schreier O., *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abhandlungen Math. Sem. Univ. Hambourg **5** (1927), 85-99.

[14] Asano, K., Shoda, K., *Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe zur Kollineationen*, Compositio Mathematica **2** (1935), 230-240.

[15] Bachmann, F., Franz, W. et Behnke H., *In memoriam Kurt Reidemeister*, Mathematische Annalen **199** (1972), 1-11.

[16] Baer, R., *Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Mathematische Zeitschrift **38** (1934), 375-416.

[17] Baer, R., *Extension types of abelian groups*, American Journal of Mathematics **71** (1949), 461-490.

[18] Bass, H., Cartan, H., Freyd, P., Heller, A., Mac Lane, S., *Samuel Eilenberg (1913-1998)*, Notices of the AMS **45** (10) (1998), 1344-1352.

[19] Boi, L., Kerszberg, P., Patras, F., eds. *Rediscovering Phenomenology. Phenomenological Essays on Mathematical Beings, Physical Reality, Perception and Consciousness*, Springer (2007).

[20] Borsuk, K., Eilenberg, S., *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fundamenta Mathematica **26** (1936), 207-223.

[21] Bos, H. J. M., *IN MEMORIAM Hans Freudenthal (1905-1990)*, Historia Mathematica **19** (1992), 106-108.

[22] Brauer, R., *Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen*, S'ber Akad. Wiss. Berlin (1926), 410-416.

[23] Brauer, R., *Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen I*, Mathematische Zeitschrift **28** (1928), 677-696.

[24] Brauer, R., *Über Systeme hyperkomplexer Zahlen*, Mathematische Zeitschrift **30** (1929), 79-107.

[25] Brauer, R., *Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **166** (1932), 241-249.

[26] Brauer, R., Noether, E., *Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen*, S'ber Akad. Wiss. Berlin (1927), 221-228 ; in Noether *Gesammelte Abhandlungen*, 552-559.

[27] Brauer, R., Hasse, H., Noether, E., *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **167** (1932), 399-404.

[28] Breitenberger, E., *Johann Benedikt Listing*, History of topology, 909-924, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[29] Brouwer, L. E. J., *Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve*, Mathematische Annalen **72** (1912), 422-425.

[30] Brouwer, L. E. J., *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen Proceedings **15** (1912), 352-360. In *Collected Works*, 2, 527-535.

[31] Brouwer, L. E. J., *The Nature of Geometry*, Collected Works, Vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, 112-120, North-Holland, Amsterdam (1975).

[32] Brown, K. S., *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[33] Burnside, W., *On the representation of a group of finite order as an irreducible group of linear substitutions and the direct establishment of the relations between the group characteristics*, Proc. London Math. Soc. (2) **1** (1903), 117-123.

[34] Burnside, W., *On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order*, Acta Mathematica **28** (1904), 369-387.

[35] Cartan, E., *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, **12**B, 1-99, in Œuvres complètes, Partie 2, Vol. 1, 7-105.

[36] Cartan, E., *Nombres complexes. Exposé, d'après l'article allemand de E. Study*, Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, Tome **1**, vol. 1, 329-468. 7 Tomes en 28 vols. Paris : Gauthier-Villars ; Leipzig : B. G. Teubner, 1904-1916.

[37] Cayley, A., *A Memoir on the theory of matrices*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **148** (1858), 17-37.

[38] Čech, E., *Höherdimensionale Homotopiegruppen*, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich 1932, p. 203.

[39] Chandler B., Magnus W., *The history of combinatorial group theory : A case study in the history of ideas*, Studies History Math. and Phys. Sci., 9, Springer (1982).

[40] Clifford, W. K., *Preliminary Sketch of Biquaternions*, Proc. London Math. Soc. **4** (1873), 381-395.

[41] Clifford, W. K., *Mathematical Papers*, Robert Tucker ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1968 (reprint of the first edition [Macmillan, London, 1882]).

[42] Clifford A. H., Mac Lane S., *Factor-sets of a group in its abstract unit group*, Transactions of the AMS **50** (1941), 385-406.

[43] Corry, L., *Modern Algebra and the rise of Mathematical Structures*, Birkhaüser, 1996.

[44] Curtis, Charles W., *Pioneers of representation theory : Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer*, History of Mathematics, 15. American Mathematical Society, Providence, RI ; London Mathematical Society, London, 1999.

[45] Curtis, Charles W., *Emmy Noether's 1932 ICM Lecture on Noncommutative Methods in Algebraic Number Theory*, in *Episodes in the history of modern algebra (1800-1950)*, J.J. Gray and K. H. Parshall eds, American Mathematical Society, 2007 ; 199-220.

[46] Curtis, C. W., Reiner, I., *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1988.

[47] van Dalen, D., *Luitzen Egbertus Jan Brouwer. 27.2.1881 Overschie - 2.12.1966 Blaricum*, History of topology, 947-964, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[48] van Dantzig, D., *Ueber topologisch homogene Kontinua*, Fundamenta Mathematica **15** (1930), 102-135.

[49] Dedekind, R., *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1885), 141-159.

[50] Dick, A., *Emmy Noether : 1882-1935*, Birkhäuser Verlag, Bâle, 1970.

[51] Dickson, L. E., *Linear Algebras*, Transactions of the AMS **13** (1) (1912), 59-73.

[52] Dickson, L. E., *Linear Associative Algebras and Abelian Equations*, Transactions of the AMS **15** (1914), 31-46.

[53] Dickson, L. E., *Algebras and their Arithmetics*, Reprint of the first edition, New York : Dover Publications, Inc., 1960.

[54] Dieudonné, J., *Emmy Noether and algebraic topology*, Journal of Pure and Applied Algebra **31** (1984), 5-6.

[55] Dieudonné, J., *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser 1989.

[56] Dirichlet, P. G. Lejeune, *Vorlesungen über Zahlentheorie, Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind*, New York : Chelsea Publishing Co., 1968, réédition corrigée de la 4ème édition (1893).

[57] Dold, A., *Lectures on algebraic topology*, New York ; Berlin : Springer-Verlag, 1972.

[58] Dyck, W., *Gruppentheoretische Studien*, Mathematische Annalen **20** (1882), 1-44.

[59] Eckmann, B., *Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe*, Comment. Math. Helv. **18** (1946), 232-282.

[60] Eilenberg, S., *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fundamenta Mathematica **26** (1936), 61-112.

[61] Eilenberg, S., *On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups*, Fundamenta Mathematica **32** (1939), 167-175.

[62] Eilenberg, S., *On homotopy groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **26** (1940), 563-565.

[63] Eilenberg, S., *Cohomology and Continuous Mappings*, Annals of Mathematics **41** (1) (1940), 231-251.

[64] Eilenberg, S., *Extension and classification of continuous mappings*, in *Lectures in Topology, University of Michigan Conference of 1940*, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1941.

[65] Eilenberg, S., *Singular Homology Theory*, Annals of Mathematics **45** (3) (1944), 407-447.

[66] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Infinite cycles and homologies*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), 535-539.

[67] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Group extensions and homology*, Annals of Mathematics **43** (1942), 757-831.

[68] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Natural isomorphisms in group theory*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA **28** (1942), 537-543.

[69] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Relations between Homology and Homotopy Groups*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA **29** (1943), 155-158.

[70] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Relations between Homology and Homotopy Groups of Spaces*, Annals of Mathematics **46** (1945), 480-509.

[71] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Cohomology Theory in Abstract Groups. I*, Annals of Mathematics **48** (1947), 51-78.

[72] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Cohomology Theory in Abstract Groups. II*, Annals of Mathematics **48** (1947), 326-341.

[73] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Cohomology and Galois Theory. I. Normality of Algebras and Teichmüller's Cocycle*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 1-20.

[74] Eilenberg, S., Mac Lane, S., *Eilenberg-Mac Lane : collected works*, Boston ; San Diego ; New York ; London : Academic Press, 1986.

[75] Eilenberg, S., Steenrod, N., *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press 1952 ; 2nd printing 1957.

[76] Epple, M., *Die Entstehung der Knotentheorie, Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1999.

[77] van Est, W.T., *Hans Freudenthal*, History of Topology, 1009-1019, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[78] Feit, W., *Richard D. Brauer*, Bulletin of the AMS (New series) **1** (1979), 1-20.

[79] Fenster, D. D., *Leonard Eugene Dickson and his work in the Arithmetics of Algebras*, Arch. Hist. Exact Sci. **52** (1998), 119-159.

[80] Fenster, D. D., Schwermer, J., *A Delicate Collaboration : Adrian Albert and Helmut Hasse and the Principal Theorem in Division Algebras in the Early 1930's*, Arch. Hist. Exact Sci. **59** (2005), 349-379.

[81] Ferry, S. C., *Remarks on Steenrod homology*, in *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Volume 2, Oberwolfach 1993*, Cambridge University Press, 1995 ; S. C. Ferry, A. Ranicki, J. Rosenberg, eds ; 148-166.

[82] Frei, G., *Zur Geschichte der Arithmetik der Algebren (1843-1932)*, Elemente der Mathematik **58** (4) (2003), 156-168.

[83] Frei, G., *Developments in the Theory of Algebras over Number Fields : A New Foundation for the Hasse Norme Residue Symbol and New Approaches to Both the Artin Reciprocity Law and Class Field Theory*, in *Episodes in the history of modern algebra (1800-1950)*, J.J. Gray and K. H. Parshall eds, American Mathematical Society, 2007 ; 117-151.

[84] Frei, G., Roquette, P., with assistance from Franz Lemmermeyer, *Emil Artin und Helmut Hasse : Die Korrespondenz 1923-1934*, Universitätsverlag Göttingen, 2008.

[85] Frei, S., Stammbach, U., *Heinz Hopf*, History of Topology, 991-1008, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[86] Freudenthal, H., *Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*, Mathematische Zeitschrift **33** (1931), 692-713.

[87] Freudenthal, H., *Der Einfluss der Fundamentalgruppe auf die Bettischen Gruppen*, Annals of Mathematics **47** (1946), 274-316.

[88] Freudenthal, H., Heyting, A., *The Life of L. E. J. Brouwer (27 February 1881 - 2 December 1966)*, in Brouwer *Collected works, Vol. 2 : geometry, analysis, topology and mechanics*, Amsterdam, New York, Oxford : North Holland, 1976 ; X-XV.

[89] Frobenius, F. G., *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Jour. reine angew. Math **84** (1878), 343-405.

[90] Frobenius, F. G., *Über vertauschbare Matrizen*, Sitz. König. Preuß. Akad. Wiss. Berlin (1896), 601-614.

[91] Frobenius, F. G., *Über Gruppencharaktere*, Sitz. König. Preuß. Akad. Wiss. Berlin (1896), 985-1021.

[92] Frobenius, F. G., *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitz. König. Preuß. Akad. Wiss. Berlin (1896), 1343-1382.

[93] Frobenius, F. G., *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitz. König. Preuß. Akad. Wiss. Berlin (1897), 944-1015.

[94] Frobenius, F. G., Schur, I., *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*, Sitz. König. Preuß. Akad. Wiss. Berlin (1906), 186-208.

[95] Frobenius, F. G., Schur, I., *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen*, Sitz. König. Preuß. Akad. Wiss. Berlin (1906), 209-217.

[96] Frobenius, F. G., Stickelberger, L., *Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **86** (1879), 217-262.

[97] Frucht, R., *Über die Darstellung endlicher Abelschen Gruppen durch Kollineationen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **166** (1931), 16-29.

[98] Fuchs, L., *Reinhold Baer's work on abelian groups*, Abelian Group Theory Lecture Notes in Mathematics 874, Springer-Verlag, New York, 1982.

[99] Gauss C. F., *Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831 April 23*, extrait de Werke II, 169-178.

[100] Hall, M., *Group rings and extensions. I.*, Annals of Mathematics **39** (1938), 220-234.

[101] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[102] Hausdorff, F., *Gesammelte Werke, Band II, Grundzüge der Mengenlehre*, Springer, 2002.

[103] Hawkins, T., *The origins of the theory of group characters*, Archive for History of Exact Sciences **7** (1971), 142-170.

[104] Hawkins, T., *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory*, Arch. History Exact Sci. **8** (1972), no. 4, 243-287.

[105] Hawkins, T., *New light on Frobenius' creation of the theory of group characters*, Arch. Hist. Exact Sciences **12** (1974), 217-243.

[106] Herreman, A., *"Topology becomes algebraic with Emmy Noether" : linear combinations and the Algebraisation of topology*, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Preprint 106, 1998.

[107] Herreman, A., *La topologie et ses signes : Éléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*, Paris : L'Harmattan, 2000.

[108] Herreman, A., *1934 Seifert/Threlfall, Topologie and 1935 Alexandroff/Hopf, Topologie*, article de 5000 mots, in Landmark writings in westen Mathematics, 1640-1940, Elsevier Science, 2005. Version française disponible à l'adresse : http ://perso.univ-rennes1.fr/alain.herreman/

[109] Herstein, I. N., *Noncommutative Rings*, Washington : The Mathematical Association of America, 1968.

[110] Hilbert, D., *The Theory of Algebraic Number Fields*, traduction I.T. Adamson, Springer (1998).

[111] Hilton, P., *Some contributions of Beno Eckmann to the development of topology and related fields*, L'Enseignement Mathématique **23** (1977), 190-207.

[112] Hirsch, G., *Comment la topologie est-elle devenue algébrique ?*, Cahiers Fundamenta Scientiae, Séminaire sur les Fondements des Sciences, Strasbourg (1982) **100**, 7-20.

[113] Hirzebruch, F., *Emmy Noether and Topology*, The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 57-65, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[114] Hölder, O., *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, Mathematische Annalen **34** (1889), 26-56.

[115] Hölder, O., *Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4*, Math. Ann. **43** (1893), no. 2-3, 301-412.

[116] Hölder, O., *Bildung zusammengesetzter Gruppen*, Mathematische Annalen **46** (1895), 321-422.

[117] Hopf, H., *A New Proof of the Lefschetz Formula on Invariant Points*, Proc. Nat. Acad. of Sciences USA **14** (1928), 149-153.

[118] Hopf, H., *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1928), 127-136.

[119] Hopf, H., *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Annalen **104** (1931), 637-665.

[120] Hopf, H., *Relations between the fundamental group and the second Betti group*, Lectures in Topology, pp. 315-316. University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1941.

[121] Hopf, H., *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe*, Comment. Math. Helv. **14** (1942), 57-309.

[122] Hopf, H., *Nachtrag zu der Arbeit "Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe"*, Comment. Math. Helv. **15** (1943), 27-32.

[123] Hopf, H. *Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören*, Comment. Math. Helv. **17** (1945), 39-79.

[124] Hopf, H., *Bericht über einige neue Ergebnisse in der Topologie*, Revista Matematica Hispano-Americana (4) **6** (1946), 147-159.

[125] Hopf, H., *Selecta*, Springer-Verlag, 1964.

[126] Hopf, H., *Einige persönliche Erinnerungen aus der Vorgeschichte der heutigen Topologie*, Colloque de Topologie, Bruxelles 1964, CBRM (1966), 9-20.

[127] Houzel, C., *La géométrie algébrique. Recherches historiques*, Albert Blanchard (2002).

[128] Huppert, B., *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967).

[129] Hurewicz, W., *Beiträge zur Topologie der Deformationen. I. Höherdimensionale Homotopiegruppen ; II. Homotopie- und Homologiegruppen ; III. Klassen und Homologietypen von Abbildungen ; IV. Asphärische Räume*, Proceedings Koninklijke Academie Wetenschappen Amsterdam, **38** (1935), 112-119, 521-528 ; **39** (1936), 117-126 ; 215-224.

[130] Hurewicz, W., *Homotopie und Homologie*, Rec. Math. [Math. Sbornik] **43** (5) (1936), 697-698.

[131] Husserl, E., *L'origine de la géométrie*, traduction J. Derrida, in Husserl, *La crise des sciences européennes*, Gallimard (1989), 409-427.

[132] James, I. M., *From combinatorial topology to algebraic topology*, History of Topology, 561-574, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[133] James, I. M., *Topologists at conferences*, History of Topology, 837-848, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[134] James, I. M., *Some topologists*, History of Topology, 883-908, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[135] Kegel, O. H., *Obituary. Reinhold Baer (1902-1979)*, The Mathematical Intelligencer **2** (4) (1980), 181-182.

[136] Kolmogoroff, A.N., *On duality in combinatorial topology* in *Selected works of A.N. Kolmogorov*, Vol I. Tikhomirov, V. M., ed., Volosov, V. M., trans. Dordrecht :Kluwer Academic Publishers (1991), 206-213. Article original : *Über die dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie*, Math. Sbornik **1** (1936), 97-102.

[137] Kolmogoroff, A.N., *Homology rings of complexes and locally bicompact spaces* in *Selected works of A.N. Kolmogorov*, Vol I. Tikhomirov, V. M., ed., Volosov, V. M., trans. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (1991), 214-220. Article original : *Homologiering des Komplexes und des lokalbikompakten Raumes*, Math. Sbornik **1** (1936), 701-706.

[138] Krömer, R., *Tool and object : a history and philosophy of category theory*, Birkhäuser, 2007.

[139] Kronecker, L., *Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen* [Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. Decbr 1870.] ; *Leopold Kronecker's Werke* 1, Chelsea, 1968.

[140] Lakatos, I., *Preuves et réfutations*, Paris, Hermann, 1984.

[141] Lakatos, I., *Histoire et méthodologie des sciences*, Paris, PUF, 1994, (1e éd. en anglais, 1986).

[142] Lefschetz, S., *Intersections and transformations of complexes and manifolds*, Trans. Amer. Math Soc. **28** (1926), 1-39.

[143] Lefschetz, S., *Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1930.

[144] Lefschetz, S., *On singular chains and cycles*, Bulletin of the AMS **39** (1939), 124-129.

[145] Lefschetz, S., *Algebraic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 27. American Mathematical Society, New York, 1942.

[146] Lefschetz, S., *Witold Hurewicz, In Memoriam*, Bull. Amer. Math. Soc. **63** (1957), 77-82.

[147] Lemmermeyer, F., *The Development of The Principal Genus Theorem*, in *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, C. Goldstein, N. Schappacher and J. Schwermer eds, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007 ; 529-561.

[148] Listing, J. B., *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien (1847), Göttingen 1848.

[149] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, New York ; Berlin ; Paris : Springer-Verlag, 1971.

[150] Mac Lane, S., *The Work of Samuel Eilenberg in Topology*, in *Algebra, topology, and category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg)*, New York : Academic Press (1976), 133-144.

[151] Mac Lane, S., *Origins of the Cohomology of Groups*, Colloque de Topologie et d'Algèbre de Zurich, avril 1977.

[152] Mac Lane, S., *Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether*, Journal of Pure and Applied Algebra **39** (1986), 305-307.

[153] Mac Lane, S., *Group Extensions for 45 Years*, The mathematical intelligencer **10** (2) (1988), 29-35.

[154] Mac Lane, S., *Homology*, Fourth Printing, Reprint of the 1975 Edition, Springer-Verlag, 1995.

[155] Mac Lane, S., *A Mathematical Autobiography*, Wellesley, Mass. : A K Peters (2005).

[156] Mac Lane, S., Schilling, O., *Normal algebraic number fields*, Transactions of the AMS **50** (1941), 295-389.

[157] Marquis, J.-P., *A Path to the Epistemology of Mathematics : Homotopy Theory*, The Architecture of Modern Mathematics, Essays in history and philosophy, 239-260 ; J. Ferreirós et J. J. Gray ed., Oxford University Press, Oxford (2006).

[158] Massey, W.S., *A history of cohomology theory*, History of Topology, 579-603, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[159] Mayer, W. *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1-42, 219-258.

[160] McLarty, C., *Exploring Categorical Structuralism*, Philosophia Mathematica **12** (1) (2004), 37-53.

[161] McLarty, C., *Learning from Questions on Categorial Foundations*, Philosophia Mathematica **13** (1) (2005), 44-60.

[162] McLarty, C., *Saunders Mac Lane (1909-2005) : His Mathematical Life and Philosophical Works*, Philosophia Mathematica **13** (2005), 237-251.

[163] McLarty, C., *Emmy Noether's 'set theoretic' topology : from Dedekind to the rise of functors*, in *The architecture of modern mathematics*, 187-208, Oxford Univ. Press, Oxford, 2006.

[164] McLarty, C., *The Last Mathematician from Hilbert's Göttingen : Saunders Mac Lane as Philosopher of Mathematics*, British Journal for the Philosophy of Science **58** (2007), 77-112.

[165] Mehrtens, H., *Ludwig Bieberbach and "Deutsche Mathematik"*, in *Studies in the History of Mathematics*, Vol. 26, E. R. Phillips ed., The Mathematical Association of America, 1987 ; 195-241.

[166] Menger, K., *Otto Schreier*, Monatsh. für Mathematik und Physik **37** (1930), 1-6.

[167] Molien, T., *Über Systeme höherer complexer Zahlen*, Mathematische Annalen **41** (1892), 83-156.

[168] Moore, E.,H., *On a form of general analysis with application to linear differential and integral equations*, dans *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici*, Rome : Accademia dei Lincei (1908),98-114.

[169] Nakayama, T., *Über die Beziehung zwischen den Faktorensystemen und der Normalklassengruppe eines galoisschen Erweiterungskörper*, Mathematische Annalen **112** (1935), 85-91.

[170] Noether, E., *Idealtheorie in Ringbereichen*, Mathematische Annalen **83** (1921), 24-66.

[171] Noether, E., *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, Nachrichten der 27 Januar 1925, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abteilung) **34** (1926), 104.

[172] Noether, E., *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, Math. Zeitschr. **30** (1929), 641-692.

[173] Noether, E., *Algebra der hyperkomplexen Größen*, in *Gesammelte Abhandlungen*, 711-763.

[174] Noether, E., *Hyperkomplexe Systeme in ihren Bezeichnungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie*, Verhandl. Intern. Math.-Kongreß Zürich 1 (1932), 189-194 ; Gesammelte Abhandlungen, Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer Verlag, 1983, 636-641.

[175] Noether, E., *Nichtkommutative Algebra*, Mathematische Zeitschrift **37** (1933), 514-541.

[176] Parshall, K. H., *Joseph H. M. Wedderburn and the structure theory of algebras*, Arch. Hist. Exact Sci. **32** (1985), no. 3-4, 223-349.

[177] Patras, F., *La Pensée mathématique contemporaine*, Paris : Presses Universitaires de France, 2001.

[178] Peirce B., *Linear Associative Algebras*, American journal of Mathematics **4** (1881), 97-215.

[179] Platonov, V. P., Yanchevskii, V. I., *Finite dimensional division algebras*, in, Encyclopaedia Math. Sci. 77, Algebra IX, Springer, Berlin, 1995 ; 121-223.

[180] Poincaré, H., *Analysis situs*, Journal de l'Ecole Polytechnique **1** (1895), 1-121 ; Œuvres, VI, 193-289.

[181] Poincaré, H., *Complément à l'Analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **13** (1899), 1-121 ; Œuvres, VI, 285-343.

[182] Poincaré, H., *Second complément à l'Analysis situs*, Proc. London Math. Soc. **32** (1900), 277-308 ; Œuvres, VI, 338-370.

[183] Poincaré, H., *Cinquième complément à l'Analysis situs*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **18** (1904), 45-110 ; Œuvres, VI, 435-498.

[184] Pont, J.-C., *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses universitaires de France (1974).

[185] Pontrjagin, L., *Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*, Mathematische Annalen **105** (1931), 165-205.

[186] Pontrjagin, L., *The general topological theorem of duality for closed sets*, Annals of Mathematics **35** (4) (1934), 904-914.

[187] Raussen, M., Valette, A., *Interview with Beno Eckmann*, Newsletter of the European Mathematical Society **66** (2007), 31-37.

[188] Reidemeister, K., *Knoten und Gruppen*, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **5** (1926), 7-23.

[189] Reidemeister, K., *Fundamentalgruppe une Überlagerung von Mannigfaltigkeiten*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Settembre 1928*, Tomo III, Liechtenstein, Kraus Reprint (1967).

[190] Reidemeister, K., *Einführung in die kombinatorische Topologie*, Braunschweig (1932).

[191] Reidemeister, K., *Homotopiegruppen von Komplexen*, Abh. Math. Seminar Hamburg **10** (1934), 211-215.

[192] Riemann, B., *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation, Göttingen (1851) ; in *Werke*, 3-43.

[193] Roquette, P., *The Brauer-Hasse-Noether Theorem in Historical Perspective*, Schriften der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Heidelberg : Springer-Verlag, 2007.

[194] Samelson, H., $\pi_3(S^2)$*, H. Hopf, W.K. Clifford, F. Klein*, History of Topology, 575-578, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[195] Sarkaria, K. S., *The topological work of Henri Poincaré*, History of Topology, 123-168, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[196] Scharlau, W., *Emmy Noether's contributions to the theory of algebras*, The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 39-55, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[197] Scholz, A., *Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen*, Mathematische Zeitschrift **32** (1930), 187-189.

[198] Scholz, E., *The Concept of Manifold, 1850-1950*, History of Topology, 25-64, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[199] Schreier, O., *Über die Erweiterung von Gruppen. I.*, Monatshefte Math. u. Phys. **34** (1926), 165-180.

[200] Schreier, O., *Über die Erweiterung von Gruppen. II.*, Abhandlungen aus dem Mathematische Seminar der Universität Hamburg **4** (1926), 321-346.

[201] Schreier, O., *Die Untergruppen der freien Gruppen*, Abhandlungen aus dem Mathematische Seminar der Universität Hamburg **5** (1927), 161-183.

[202] Schur, I., *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebener Matrix zuordnen lassen*, Dissertation, Berlin, 1901 ; Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag, Berlin, 1971, I, 1-73.

[203] Schur, I., *Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen*, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Xiss. Berlin, 1902 ; 1013-1019.

[204] Schur, I., *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, Jour. reine angew. Math. **127** (1904), 20-50.

[205] Schur, I., *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*, Sitz. König. Preuß. Akad. Wiss. Berlin (1905), 406-432.

[206] Schur, I., *Arithmetische Untersuchungen über die endliche Gruppen linearer Substitutionen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, 164-184 ; Gesammelte Abhandlungen I., 177-197.

[207] Schur, I., *Untersuchung über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, Jour. reine angew. Math. **132** (1907), 85-137.

[208] Schur, I., *Beiträge Zur Theorie Der Gruppen Linearer Homogener Substitutionen*, Transactions of the AMS **10** (2) (1909), 159-175.

[209] Schur, I., *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternienden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, Jour. reine angew. Math. **139** (1911), 155-250.

[210] Schur, I., *Einige Bermerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn A. Speiser*, Mathematische Zeitschrift **5** (1919), 7-10.

[211] de Séguier, J.-A., *Théorie des Groupes Finis. Eléments de la Théorie des Groupes Abstraits*, Gauthier Villars, Paris, 1904.

[212] Seifert, H., Threlfall, W., *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig und Berlin : B. G. Teubner (1934).

[213] Speiser, A., *Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie*, Mathematische Zeitschrift **5** (1919), 1-6.

[214] Steenrod, N. E., *Regular cycles of compact metric spaces*, Annals of Mathematics **41** (2) (1940), 833-851.

[215] Steinitz, E., *Algebraische Theorie der Körper*, Jour. reine angew. Math. **137** (1910), 167-309.

[216] Sylvester, J. J., *Collected Mathematical Papers*, 4 vol., Cambridge, 1904-1911.

[217] Takagi, T., *Über eine Theorie der relativ Abel'schen Zahlkörpers*, Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo **44** (1920), 1-133.

[218] Takens, F., *Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors*, Topology and its Applications **152** (2005), 219-225.

[219] Teichmüller, O., *p-Algebren*, Deutsche Mathematik **1** (1936), 362-388.

[220] Teichmüller, O., *Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation* $\xi_{\lambda,\mu,\nu}\xi_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi^{\lambda}_{\mu,\nu,\pi} = \xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}$, Deutsche Mathematik **5** (1940), 138-149.

[221] Tietze, H., *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Monatshefte für Mathematik und Physik **19** (1908), 1-118.

[222] Turing, A. M., *The extensions of a group*, Compositio Mathematica **5** (1938), 357-367.

[223] Vanden Eynde, R., *Historical evolution of the concept of homotopic paths*, Arch. Hist. Exact Sci. **45** (1992), no. 2, 127-188.

[224] Veblen, O., *Analysis Situs* 2e ed, AMS, New York, 1921.

[225] Vietoris, L., *Über den höheren Zusammenhang von Kompakten Räumen und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert läßt*, Proc. Amsterdam **29** (1926), 1008-1013.

[226] Vietoris, L., *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Mathematische Annalen **97** (1927), 454-472.

[227] Vietoris, L., *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abt.) **36** (1927), 28-29.

[228] Volkert, K., *Das Homöomorphismusproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935*, Philosophia Scientiæ, Cahier spécial **4** (2002).

[229] van der Waerden, B. L., *Kombinatorische Topologie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **39** (1930), 121-139.

[230] van der Waerden, B. L., *Moderne Algebra* 2, Berlin, 1931.

[231] van der Waerden, B. L., *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen **111** (1935), 469-476.

[232] van der Waerden, B. L., *A History of Algebra, From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer, Berlin, 1985.

[233] Weber, H., *Lehrbuch der Algebra*, Vol. 2 (1896), Braunschweig.

[234] Wedderburn, J. H. M., *On Hypercomplex Numbers*, Proceedings of the London Mathematical Society **6** (1907), 77-118.

[235] Wedderburn, J. H. M., *A Type of Primitive Algebra*, Transactions of the AMS **15** (2) (1914), 162-166.

[236] Weibel, C. A., *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[237] Weibel, C. A., *History of Homological Algebra*, History of topology, 797-836, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[238] Weierstrass, K., *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1884), 395-419.

[239] Weyl, H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig, 1913.

[240] Weyl, H., *Análisis situs combinatorio*, Revista Matematica Hispano-Americana **5**, 43 pages (1923).

[241] Weyl, H., *Análisis situs combinatorio (continuación)*, Revista Matematica Hispano-Americana **6** (1924), 1-9, 33-41.

[242] Whitney, H.,*The maps of an n-complex into an n-sphere*, Duke Mathematical Journal **3** (1) (1937), 51-55.

[243] Whitney, H., *On products in a complex*, Annals of Mathematics **39** (2) (1938), 397-432.

[244] Whitney, H., *Letting research come naturally*, Math. Chronicle **14** (1985), 1-19.

[245] Whitney, H., *Moscow, 1935 : Topology moving toward America*, in A Century of Mathematics in America, Vol. 1, P. Duren, ed., AMS, Providence, RI (1988), 97-117.

[246] Witt, E., *Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **173** (1935), 43-51.

[247] Zassenhaus, H., *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Leipzig, Berlin, 1937.

Résumé

Cette thèse étudie d'un point de vue historique la genèse de la cohomologie des groupes, théorie qui vit le jour dans les années 1940. Il s'agit d'une théorie à la fois algébrique, au sens où elle donne des résultats sur les groupes, et topologique par les méthodes qu'elle met en œuvre. Le présent travail analyse les mécanismes par lesquels la topologie et l'algèbre se sont interpénétrées pour donner naissance à cette théorie abstraite et élaborée, en mettant notamment en perspective ce phénomène par rapport à ceux, plus globaux, de la naissance et de l'expansion de l'algèbre moderne. Y sont notamment discutées l'influence d'Emmy Noether dans l'algébrisation de la topologie et les motivations respectives de Heinz Hopf et d'Eilenberg & Mac Lane les ayant menés à l'élaboration de l'homologie des groupes. L'analyse minutieuse de plusieurs articles phares – dus aux auteurs cités précédemment mais aussi à Schur, Vietoris ou encore Eckmann – permet de mettre en lumière le fait que la volonté de répondre à des problèmes mathématiques précis fut peut-être plus motrice, dans l'émergence de cette théorie architectonique qu'est la cohomologie des groupes, que de grandes idées directrices conçues au sein de représentations structurales des mathématiques.

Abstract

The goal of this thesis is the historical study of the genesis of group cohomology, a theory that came up during the nineteen-forties. It is an algebraic theory in the sense that it gives results on groups and it is as well a topologic one because of the methods it involves. The present work analyses how topology and algebra interpenetrated each other to give birth to this abstract and elaborate theory, by putting into perspective this phenomenon with respect to more global ones like the birth and the rise of modern algebra. Namely we discuss the influence of Emmy Noether in the algebraization of topology and the respective motivations of Heinz Hopf and Eilenberg & Mac Lane that led them to the development of group homology. A meticulous analysis of several seminal articles – due to the authors cited above and others including Schur, Vietoris and Eckmann – enables to highlight the fact that the will to answer specific mathematical problems was perhaps more propulsive in the emergence of this architectonic theory that group cohomology is, than great guiding ideas elaborated in the framework of structural representations of mathematics.